大森英樹——[著]

数学のなかの物理学

幾何学的量子論へむかって

東京大学出版会

Physics in Mathematics:
Toward Geometrical Quantum Theory
Hideki OMORI
University of Tokyo Press, 2004
ISBN4-13-061304-9

はじめに　物理に対する数学の立場

1冊の本の読み方にもいろいろある．「熟読」「精読」「通読」「斜め読み」「のぞき読み」「つんどく」などなど．どんな読み方をされても耐えるような本というのが本としての価値が高いものだろうが，「つんどく」に耐えるためにはある程度厚さがないと枕にもならないだろう．

表題を「物理学とは数学の中に入っているものである」という主張だと誤解したがる人もいるとは思うが，著者はそんな大それた主張をしたいわけではなく，「物理学の中の数学的，ないし，幾何学的に論ずることができる部分」（あるいは，数学から発せられた物理へのメッセージ）の意味である．本のスタイルは教科書風だがけっして教科書ではないから，誤解しないでほしい．

物理と数学の間には「時間の概念」「エネルギーの概念」という越えがたい溝がある．数学でも「時間」という言葉は使うが，これはたんに1変数のパラメーターをそう呼ぶことがあるということである．これはエネルギーについても同様である．

これに対し，物理で「時間」とか「エネルギー」といった場合にはこれは物理概念としてはっきりしているものを指しているわけで，温度を表しているパラメーターを時間と呼んだりすることはない．この立場の違いを意識しておいてほしいのである．

物理法則のほとんどは原因と結果という因果関係の記述であるから，ここでは「時間」の前後は重大な意味を持つ（にもかかわらず，大概の物理法則は時間の反転について対称にできている）．

「叱られないと勉強しない」という言葉を時間の前後を考えて因果関係とみるか，または継続している状態とみるかはどちらでもよいだろうが，数学でいう（時間概念を含まない）論理関係と思って対偶を「勉強すると叱られる」としたのでは明らかにおかしい．これは時間の前後を入れて「その前に叱られてないと勉強しない」と読むか，時間の継続を入れて「叱られ続けていないと勉強しない」のように読むべきものであることは明らかであろう．

因果関係であっても時間の順序に注意して使えば論理関係のように扱うこと

ができることが経験的にわかってはいるが，時間というものが何であるかが数学的にわかっているわけではない．

数学，とくに微分方程式論などが物理とは独立に存在し得る学問であるというのはブルバキ流の現代数学で教育された若者にはあたりまえのことのように響くかもしれないが，実情はそうでもなく，解析の中に物理学の公理を持ち込んで，時間とか，エネルギーという物理概念を自分の数学の指導理念として，暗黙に物理の下請けとしての数学に甘んじている立場の数学者もいるのであるが，ここではその立場はとらない．あくまで，数学と物理学とは違う，独立した学問であるという立場をとっている．

さらに数学と物理学の決定的違いは，物理学がつねに，謎（=矛盾）を内包する開いた系であるのに対し，(少なくともたてまえとしては）数学は論理的に閉じた系であるということであろう．**純粋数学者にとっては矛盾を含むものは数学的には存在しないものである**．だから，数学者が物理学を考えられるようになるのは物理学が完全に公理化された後に限るとする立場をとって物理に近づかない（保守的）数学者も数多い．

数理物理学というものを考えるときには，物理よりの考えから，数学よりの考えまでさまざまあってまったく統一がとれていないのが現状であるが，ここでは，数理物理学とは「いつかは，不確定性原理を取り込んだ量子物理学の公理を書きたいと努力している学問」というようにとりあえず理解しておくことにする．この部分が現代の数学で最も活発に動いている部分である．

数理物理学という認知された分野があったものとして，その発達過程，歴史をひもといてみれば，それは「観測」と「直線」とか「点」の概念の発達の歴史であるということができよう．「観測」とはわれわれが物事を認識するときの「認識」の問題に関係し，「直線」とか「点」はその認識の対象の中で最も純粋と思われる概念である．

時間の感覚は誰にもあるのだが，「時とは何か」と聞かれると答えられる人はいない．「直線」あるいは「まっすぐな線」というのも同じようなもので，「まっすぐ」という感覚は誰にもあるのだが，(空間を $\mathbb{R}^3$ と断定しない立場で）「直線」とはいったいどういうものであろうか？　たとえば，地球表面上での「まっすぐ」と，宇宙空間内での「まっすぐ」が同じものを指していないことは明らかであろう．ガリレオがいう「等速直線運動」というのも感覚的にはわかると

しても，その数学的内容は何だろうか？

19世紀，数学（この頃は物理と数学の区別ははっきりしていないが）は「まっすぐ」ということがどういうことかについてはっきり答えられるまでに進歩した．数学の用語でいえば，変分原理による説明でかなり統一的に理解できるようになったということである．

しかし，この発達は「観測」とか「空間」を棚上げし，不問に付した結果可能になったのである．つまり，このようなものを素朴な理解でそのまま（必要悪として）理想化し，その上に立って運動とか直線を数学的に記述したのである．

20世紀の数学，とくに幾何学ではこのとき不問に付された「空間」の多様性が主題になっている．しかし，「観測」とか「空間」の構成要素である「点」の概念についてはやはり不問に付されたのである．しかもそれは，ブルバキによって絶対化され神格化され，全数学はその上部構造にすぎないとされているのである．

しかし，今日注目されているのは「点」の概念である．ユークリッドの幾何学原論では「点」の概念は「位置のみあって大きさのないもの」といったように説明されているのだが，最近の数理物理学の最前線ではこの部分の理解のしかたが大きく変わろうとしているのである．

多くの人びとの努力の結晶として，こういうものが少しずつ変化，進歩してきているのである．その流れはまさしく「大河」ではあるのだが，その大河に身をおく人間には意識しがたい流れである．

何をもって「疾風怒涛の時代」と呼ぶかは人によるが，素粒子論の疾風怒涛の時代は，大型加速器の値段が国家予算に匹敵するような時代になってきたので過ぎ去ったと，多くの人びとは認めているようである．すると，これからしばらくの間素粒子論は「内省の時代」となり，物理の中の数学の再発見の時代になるだろうという甘い期待でこの本は書かれている：

やれやれ，やっとこれで物理学者と話ができる

というのが，数学者の正直な感想である．

本書では本文の中，数学記号の中に次のような記号が使われているので，その意味（読み方）を表にして掲げておく：

$\mathbb{Z}$	整数全体
$\mathbb{N}$, $\mathbb{N}_0$	自然数全体，零を含む自然数全体
$\forall \cdots$ に対して	任意の $\cdots$ に対して
${}^{\exists} g \cdots$	g が存在して $\cdots$
$A \Rightarrow B$	A ならば B
$a \in A$	a は集合 A の元
$\emptyset$	空集合，元が 1 つもない集合
$A \cap B$	集合 A と B の共通部分
$\bigcap_{\alpha \in I} A_\alpha$	A_α すべての共通部分
$A \cup B$	集合 A と B の和集合
$\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha$	A_α すべての和集合
∂_t	$\frac{\partial}{\partial t}$ 偏微分
$x^1, x^2, \cdots, x^n$	変数の番号を上付き文字で表す
∂_{x^i}	$\frac{\partial}{\partial x^i}$ 偏微分
$V \oplus W$	直和，集合としては直積，線形構造まで考えたときこう書く

また，アインシュタイン記法といって，総和記号を省略する記号法も採用しているところがある．これは $\sum_{i=1}^n A_i B^i$ のように，総和するために使う添字が上下に重複してでてきているときに，総和記号を省略してたんに $A_i B^i$ と書いてしまうやり方だが，総和がたくさん現れるときには便利な書き方である．

数学のなかの物理学——幾何学的量子論へむかって　目次

第 1 章　素朴な観測論と多様体

「素朴な」という意味は文字どおり素朴でおおらかなもの，「連続体」(continuum) という考え方がまだ新鮮でかっこよく，飛翔の翼だと思われていた時代の感覚を指す．連続体とは，原子とか原子核といった存在に人びとが気づく以前に物体に対して素朴に持っていた感覚であり，どこまでも限りなく細かく分割できるもののことである．これは 1 つの豆腐を 2 等分し，それぞれをまた 2 等分し，またそれぞれを 2 等分し …… といったように何回も 2 等分を繰り返すことによって理解されるもの（カスケード（分かれ滝）構造という）である．

1.1　状態の空間，自由度

連続体の感覚の本質を最も数学的に表現しているのが実数直線（実数連続体）である．人間の理性はこのような非可算無限の論理を含むものを論理的に取り込み，微積分学として結晶させた．

20 世紀，この連続体は多様体なる連続体に形を変え，諸科学の基礎概念としての地位を確保した．話はこの辺からはじめなければなるまい．

何でもよいが，たとえば「世界経済」といったような，われわれが科学したいと思っている対象を 1 つ想定して，それを M としよう．M はさまざまな「世界経済状態」の集団であると考えられる．数学ではこの場合，

「M はさまざまな（世界経済）状態を元（げん）とする集合である」

という述べ方をする．対象としての M をこのように元（構成要素）の集まりであると考えるのは**原子論的考え方**と呼ばれるが，この場合の「原子」とはギリシャ人の考えた原子のことである．考察しようとする状態すべてを含むので M は**小宇宙**などと呼ばれることもあるが，数学では（個性を殺して）たんに**空間**と呼ぶことが多い．こういう場合には構成要素はたんに**点**と呼ばれる．

素朴な観測論に基礎をおく多様体論では「点」が最優先で与えられて絶対的意味を持っていないといけない．これを**拝点主義**とでも言っておこう．

われわれは M およびその元を知るために，見たり触れたりすることを含めてさまざまな観測，計測を行なう．いま，各状態に対して f なる観測を行なっていると想定してみよう．M の元，つまり状態を p と書いて，観測 f を行なって得られる実数値（観測値）を $f(p)$ と書くことにする．

この場合，観測値 $f(p)$ を得るために状態 p は少し変化するはずだが，「この変化は無視できるほど小さくできる」と考える．

これは最も古典的な考え方で，観測というものをこのようなものだと仮定すると，観測 f というのは M から実数 $\mathbb{R}$ への写像，つまり M 上の関数だということになる．観測というものが状態に何の変化も与えずに実行できると考えているから，1 つの状態に対していろいろな観測を同時に行なうことができると考える（このことが「素朴な」観測論の特徴である）．

そこで，対象 M に対して行なうことのできる観測の全体を $\mathcal{O}$ と書く．$\mathcal{O}$ の元 f は「観測 f」を意味するから M 上の関数である．$\mathcal{O}$ を**可能観測**[1]**の集合** (observables) と呼んでおこう．

1 つの状態に対していろいろな観測を同時に行なうことができると考えているから，$\mathcal{O}$ が**代数** (algebra) と呼ばれる左の性質を持つと考えるのは自然であろう．ただし，$(f+g)(p)=f(p)+g(p)$, $(fg)(p)=f(p)g(p)$, $(cf)(p)=cf(p)$ の意味である．$fg=gf$ なの

(1) $f,g\in\mathcal{O}\Rightarrow f+g\in\mathcal{O}$
(2) $f,g\in\mathcal{O}\Rightarrow fg\in\mathcal{O}$
(3) $f\in\mathcal{O},\ c\in\mathbb{R}\Rightarrow cf\in\mathcal{O}$

1) observables は普通「観測可能量」と訳されているが，しっくりしないので上のようにした．

で，このようなものは**可換代数**，あるいは可換環と呼ばれる．可能観測の集合 $\mathcal{O}$ は可換代数をなすわけである．以下では話の都合上 $\mathcal{O} \ni 1$（定数関数）とする．これはいつでも 1 という値をとる関数だから観測値としては意味がないようにも見えるが,「何が 1 であるか」を指定していて，いろいろなものの基準を与えるものと思ったほうがよい．

さて，M の元 p, p' に対してすべての観測値が一致したとしてみよう．これはわれわれが状態 p と p' を識別する手段を持っていないことを意味するから，$p = p'$ と考えざるを得ない．これは**観測至上主義**とでもいうべき態度だが，奇妙な神秘主義に走らないためにはこう考えないといけない．すると，観測至上主義と素朴な観測論によって得られる数学的構造は M という集合とその上の実数値関数からなる可換代数 $(M, \mathcal{O})$ ということになるであろう．

この状況でどんなことが述べられるのだろうか？　数学，とくに幾何学という学問はこういうときに矛盾なく設定できる概念の総体を考える学問である．ここでまず「位相」(topology) という概念が登場する．

> 位相とは「連続」という概念が数学的に述べられるような最小のしかけである．何が開集合であるかを決めると位相は決められる．

位相を与えるということは**開（部分）集合**と称するものの全体（開集合族）を与えることである．これも族の性質に対する約束で与える．**開集合族**とは左の3つの性質を持つ部分集合の集まりのことである．このような性質を持つ部分集合族 $\tilde{\Omega}$ が与えられたとき，「$\tilde{\Omega}$ を開集合族として M に位相が定義された」という．(2) の性質から，有限個の開集合の共通部分は開集合である．(3) で述べた I はどんな集合でも（もちろん無限集合でも）よいことが味噌で，開集合はどれほどたくさん和集合をつくっても開集合であるといっているのである．

(1) $\emptyset, M \in \tilde{\Omega}$
(2) $A, B \in \tilde{\Omega} \Rightarrow A \cap B \in \tilde{\Omega}$
(3) 集合 I の元を添字として，
$\forall \alpha \in I, A_\alpha \in \tilde{\Omega} \Rightarrow \bigcup_\alpha A_\alpha \in \tilde{\Omega}$

M の部分集合 A が与えられているとして，点 $p \in A$ が A の**内点**であるとは，$p \in U$ で，かつ $U \subset A$ となるような開集合がある場合をいう．形式論理的頭の使い方の練習として次のことを示しておこう．

補題 1.1　A が開集合であることと A のすべての点が内点であることは同値．

証明 「A が開集合 $\Rightarrow$ A のすべての点が内点」は定義より明らかだろう．A のすべての点が内点 $\Rightarrow$ $\forall p \in A$ に対して V_p という開集合で $V_p \subset A$ となるものがある．すると (3) の性質より，$\bigcup_{p\in A} V_p$ も開集合であるが，この集合はすべての $p \in A$ を含むから $A \subset \bigcup_{p\in A} V_p$ であり，一方 $V_p \subset A$ なのだから，$\bigcup_{p\in A} V_p \subset A$ である．したがって，$A = \bigcup_{p\in A} V_p$ となり，A が開集合である． （証明終わり）

開部分集合の族 $\mathcal{U}$ であって，すべての開集合 $\in \tilde{\Omega}$ が $\mathcal{U}$ の元の（無限個の）和集合で書かれるとき，$\mathcal{U}$ は**開集合の基**であるという．

実数直線 $\mathbb{R}$ では開集合族 $\tilde{\Omega}(\mathbb{R})$ として

「すべての開区間を含み，かつ上の (1)–(3) を満たす最小の集合族」

をとり[2)]，これで位相を定義するのが普通である．この場合，開区間の全体というのは開集合の基である．

M から $\mathbb{R}$ への写像 f が与えられたとき，M の部分集合 U に対して $f(U) = \{f(x); x \in U\}$ を f による U の像，またはたんに f の**像**と呼ぶ．さらに，$\mathbb{R}$ の部分集合 A について，$f(x) \in A$ となるような $x \in M$ の全体を $f^{-1}(A)$ と書き，**A の f による原像**と呼ぶ．

位相が与えられた 2 つの空間 X, Y について，写像 $f: X \to Y$ が**連続**であるとは，Y の任意の開部分集合の f による原像が X の開部分集合になる場合をいう．$f: X \to Y$ が全単射で f, f^{-1} がともに連続のとき**同相写像** (homeomorphism) という．

一方，開（部分）集合の補集合を**閉（部分）集合**と呼ぶ．すると，上の連続性の定義は Y の任意の閉部分集合の f による原像が X の閉部分集合になる場合であると言い換えても同じであることは簡単な論理の演習問題であろう．

可能観測の代数 $\mathcal{O}$ が与えられたとき，$\forall A \in \tilde{\Omega}(\mathbb{R}), \forall f \in \mathcal{O}$ に対して原像 $f^{-1}(A)$ を考えそれの全体を $\tilde{\Omega}$ とすれば上の (1)–(3) を満たす．つまり，これで状態の空間 M に位相が定義される．

上のようにきわめて厳格に述べてはみたが，要するに

2) しかし，この述べ方は数学に慣れていない人にとっては難しく感じるであろう．上のように $\tilde{\Omega}(\mathbb{R})$ が定義されたからといって，$\tilde{\Omega}(\mathbb{R})$ の全体を頭に思い浮かべようとしなくてもよいのである．上の定義は $\mathbb{R}$ 上で開集合なるもののつくり方または判定法を述べているにすぎないのである．そういうものが頭に入っただけで，全体が把握できたことにしてしまうというのがこういうところを理解するこつである．

$\mathcal{O}$ の元がすべて連続関数に見えるような位相を M に与えただけである．

定義 1.1　M の点 p に対して，p を含む開集合を p の**開近傍**と呼ぶ．p の開近傍の全体を（p の）**開近傍系**と呼ぶ．

観測至上主義の立場では，M 内の $\forall$ の 2 点 $p \neq q$ に対して，必ず何か $f \in \mathcal{O}$ で $f(p) \neq f(q)$ となるものがあるはずである．これを使うと次のことが容易にわかるだろう．

補題 1.2　M 内の $\forall$ の 2 点 p, q に対して，p の近傍 U_p，q の近傍 U_q で $U_p \cap U_q = \emptyset$ となるものがある．このことを M は **T_2-分離公理**を満たす（または M はハウスドルフ (Hausdorff) 空間である）という言い方をする．

観測至上主義に立てば，p と q が「近い」ということは明白で，任意に選んだ観測において観測値が近ければ「近い」と定義すればよいように思えるだろうが，この述べ方はあまり精密でない．近いとか遠いとかを数量化しようとすると距離の概念を持ち込まなければならないが，そのためにはもっとさまざまな仮定をしなければならないのである．ここでは**距離空間**というものの定義を与えるにとどめる．

集合 M が**距離空間** (metric space) であるとは**距離関数**と呼ばれる左の 3 つの性質を持った $d : M \times M \to \mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ が定義されている空間 M のことである．$d(x, y)$ を点 x, y の**距離**という．不等式 (3) は**三角不等式**と呼ばれる．これらはわれわれが「距離」という言葉を使ったとき最低限要求する性質である．このような d がどういうときにうまく定義できるかという問題は位相空間論としてけっこう難しいことである[3]．

(1) $d(x, y) = d(y, x) \geq 0$
(2) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
(3) $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$

点列 $\{p_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が p **に収束する**ということは $\lim_{n\to\infty} d(p_n, p) = 0$ と表現すればよいだろうが，距離空間では距離という共通の物差しがあるので，収束先を与えないで**何かに収束する**という言い方ができる．

3)　文献 [21]，位相空間の項参照．

定義 1.2　点列 $\{p_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が**コーシー列** (Cauchy sequence) とは $\forall\varepsilon > 0$ に対してある番号 n_0 があって $m, n \geq n_0$ ならば $d(p_m, p_n) < \varepsilon$ となる場合をいう.

これは，いわば収束先を与えないで「収束する」ということを述べているのだが，そうなると収束先がわざと取り除かれているようなことも起こる．そのようなことが起こっていないことの定義として，すべてのコーシー列の収束先がある距離空間 (M, d) を**完備距離空間**という．収束先はあるとすれば 1 つであることがすぐにわかる (2 つあったらどうなるか考えよ).

完備でない距離空間があったら，コーシー列に対しその収束先を仮想的に与えることにより完備距離空間がつくられる．これを**距離空間の完備化**という.

1.1.1　自由度

ここで化学などでよく使われている「自由度」という概念を持ち出さないといけない．自由度の概念は観測の独立性という概念に密着している.

$\mathcal{O}$ の元 $f_1, \cdots, f_n$ が状態 $p \in M$ で（**互いに**）**独立**であるとは，どの f_i $(1 \leq i \leq n)$ についても f_i 以外の観測値を全部一定に保ち，f_i だけの値が変化するように p が変化できる（変化させられる）場合をいう．p **における** M **の自由度**とは p で独立な $\mathcal{O}$ の元の最大個数のことである．したがって p での M の自由度が d であるとは,

(1) $\mathcal{O}$ の元 $f_1, \cdots, f_d$ があり，これらは $p \in M$ で独立

(2) $\forall f \in \mathcal{O}$ に対し，$f, f_1, \cdots, f_d$ は $p \in M$ で独立でない

ということになる．述べ方からして，線形代数で習う，線形空間の「次元」の概念と同質のものだということがわかるであろう.

(2) の部分をよく見ると，$f_1, \cdots, f_d$ の値を保ったまま f の値を変化させることは不可能であると述べている．これは何か p の近傍があってそこの p' については $f_1(p'), \cdots, f_d(p')$ の値が決まってしまうと $f(p')$ も決まってしまうということを意味する．これを数学的に表現すると f に対して何か d 変数の連続関数 $\Phi_f(x_1, \cdots, x_d)$ があって，p の近傍では

$$f(p') = \Phi_f(f_1(p'), \cdots, f_d(p')) \tag{1.1}$$

と書けることになる．以下では**自由度は** M **のどこでも一定である**としよう.

> 自由度が一定で d（有限）なる対象の状態空間は d-次元多様体である.

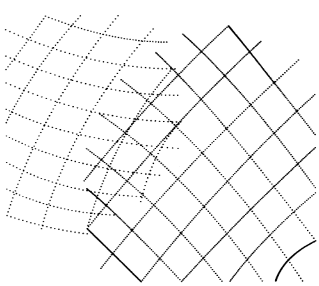
Φ_f がどのような d 変数の関数であるかはもっとさまざまなことをいわないと決まらないが，多くの場合（観測というものに滑らかさを期待して）C^∞-関数（2.1.2 項参照）であると仮定される[4].

点 p の近傍にある状態 p', p'' に対して

$$(f_1(p'), \cdots, f_d(p')) = (f_1(p''), \cdots, f_d(p''))$$

だったとしてみよう．これは $\forall f \in \mathcal{O}$ に対して $f(p') = f(p'')$ を意味してしまうから，観測至上主義の立場からは $p' = p''$ としなければならない．つまり，状態 p' は d 個の数の組 $(f_1(p'), \cdots, f_d(p'))$ で決まってしまうわけである．数学ではこれを「状態 p' は座標 $(f_1(p'), \cdots, f_d(p'))$ を持つ」という言い方をする．$(f_1, \cdots, f_d)$ が p の近傍の状態をすべて表すことから，これを（p の近傍の）**局所座標系**と呼ぶ．また，この局所座標系が定義される近傍を**座標近傍**と呼び，V_p と書く．この辺の定義は普通の C^∞-多様体の定義（次頁参照）とまったく同じに見えるかもしれないが，少し違っていて，f_i が $\mathcal{O}$ の元であることも要求されている[5].

座標変換



するとある状態（点）p' は p の座標近傍 V_p に含まれると同時に，別の点 q の座標近傍 V_q に含まれるといったことが起こる．V_p と V_q の共通部分では p' は $(f_1(p'), \cdots, f_d(p'))$ と表せたり，V_q 上の局所座標系 $(g_1, \cdots, g_d)$ を用いて $(g_1(p'), \cdots, g_d(p'))$ のようにも書かれる．

以下では Φ_f は C^∞-関数であると仮定する．(1.1) 式の Φ_f の f を g_i にして考えてみれば，各 $i\,(1 \le i \le d)$ に対して $\Phi_{g_i} = \Phi_i(x_1, \cdots, x_d)$ という C^∞-

4) しかし，この仮定は $\mathcal{O}$ の性質としてというよりは勝手に持ち込まれるものである.
5) 微妙な違いだが複素多様体の定義をするときには大きな違いになる.

関数があって

$$g_i(p') = \Phi_i(f_1(p'), \cdots, f_d(p')), \quad 1 \leq i \leq d$$

と書かれることになる．これは f_i と g_i の立場を入れ換えても同じことだから，各 $i\,(1 \leq i \leq d)$ に対して $\Psi_{g_i} = \Phi_i(y_1, \cdots, y_d)$ という C^∞-関数があって $f_i(p') = \Psi_i(g_1(p'), \cdots, g_d(p'))$ $(1 \leq i \leq d)$ のようにも書かれる．これを**座標変換**と呼ぶ．これは変数だけの関係で書いてみれば次のようになる：

$$y_i = \Phi_i(x_1, \cdots, x_d), \quad x_j = \Psi_j(y_1, \cdots, y_d) \quad (1 \leq i, j \leq d).$$

Φ も Ψ も C^∞-関数なので，このようなものを C^∞-**可微分同相**と呼ぶ．

> C^∞-**多様体**とは互いの座標変換が C^∞-可微分同相であるような座標近傍系で覆われた T_2-分離公理を満たす位相空間のことである．

C^∞-多様体 M から $\mathbb{R}$ への写像 $f : M \to \mathbb{R}$ が C^∞-写像であるとは，各座標近傍で $f(p) = \Phi_f(f_1(p), \cdots, f_d(p))$ のように局所座標系を使って表示したとき C^∞-関数として表示される場合をいう．$C^\infty(M)$ を M 上の C^∞-関数の全体とする．

多様体上で成立する概念とは，各座標近傍で述べられてはいるが，それが座標変換によって変わってしまわないような概念のことなのである．

1.1.2 点の再定義

C^∞-多様体としての M がまずあって，そこで可能観測の全体 $\mathcal{O}$ を考えるという立場だと，$\mathcal{O}$ は目いっぱい大きいものを考えておけばよいから，$\mathcal{O} = C^\infty(M)$ とするのが自然であろう．しかし観測を主体に考えてみれば，次のように考えることもできるであろう．

> 発想の逆転
>
> $\mathcal{O}$ が定数関数 1 を持つ可換代数としてまず存在していて，点とは $\mathcal{O}$ から $\mathbb{R}$ 上へ（全射 (onto) とも言う）の準同型写像のことである．

(1) $p(f+g) = p(f) + p(g)$
(2) $p(fg) = p(f)p(g)$

$p : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ が**準同型写像**であるとは左のような 2 つの性質を持つ写像のことをいう．

この場合には観測が主体で，観測によって M がわかるのだと考えているのだから，$\mathcal{O} \subset C^\infty(M)$ ではあるが，$\mathcal{O} = C^\infty(M)$ と思っているわけではないことに注意しよう．

同じことを裏側から述べているだけという印象は免れまいが，こういうものでも話の流れを $M \Rightarrow \mathcal{O}$ から $\mathcal{O} \Rightarrow M$ に変えさせる力がある．

> 価値観の変動はいつも深く静かなところで起こる．状態まで人が観測という行動によって決めているのだとしたら人間の行動の持つ意味は，やはりかなり変化する．（「始めに行動があった」）

$p : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ を点とすると，p は $\mathbb{R}$ への写像だから $p(f) \in \mathbb{R}$ であるが，これを $f \in \mathcal{O}$ の p における**値**と呼び $f(p)$ と書く．p は準同型写像だから p の**核** $\mathrm{Ker}\, p$ というのが $\mathrm{Ker}\, p = \{f \in \mathcal{O}; p(f) = 0\}$ として定義される．これは $\mathcal{O}$ の中の**極大イデアル**と呼ばれるものになっている．

まず**イデアル**という概念を定義しよう．可換環 $\mathcal{O}$ のイデアル $\mathcal{I}$ とは次の 2 つの性質を持った部分空間のことである．

(1) $f \in \mathcal{I}, g \in \mathcal{O} \Rightarrow fg \in \mathcal{I}$
(2) $f, g \in \mathcal{I} \Rightarrow f + g \in \mathcal{I}$

これは 0 **が持っている性質**を書いたもので，0 に何をかけても 0，$0+0=0$ といっているのである．イデアル $\mathcal{I}$ が与えられたとき，商空間 $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ とは $\mathcal{I}$ の元をすべて 0 と思ってしまった代数のことである．

$\mathcal{I} = \mathrm{Ker}\, p$ の場合には商空間 $\mathcal{O}/\mathcal{I}$ は $\mathbb{R}$ となるが，$\mathbb{R}$ は 0 以外のイデアルを持たないから $\mathrm{Ker}\, p$ を本当に含んでいるイデアルは全体になってしまうという意味で極大（もうこれ以上大きいものはない）なものである．

しかし，上の議論では自由度一定という仮定から M が多様体[6]ということまでは自然に出せるが，座標変換が C^∞-級ということなどは勝手に**手で入れて**（仮定して）しまっている．

可能観測の集合 $\mathcal{O}$ が状態をつくりだしているのであるという逆転した考え方からすれば，このようなものも可換代数 $\mathcal{O}$ の性質として代数の中に書き込まれているべきものであろう．しかし，そのためには $\mathcal{O}$ を位相代数にして考える必要があるので，これは後の章にゆずる．

6) 正確には C^0-多様体（位相多様体）というべきである．

> $\mathcal{O}$ の性質だけで多様体の C^∞-性を定義するのは難しいのである．これは些細なことのように思われるかもしれないが，微分可能性は連続体特有の概念だから，深刻な問題である．

根基

可換代数 $\mathcal{O}$ の元 a が**冪零元**（べきれいげん）であるとは，ある k で $a^k = 0$ となる元のことである．k は a に依存してよい．冪零元の全体を $\mathcal{R}_0$ とする．$a \in \mathcal{R}_0, f \in \mathcal{O}$ のとき，$af \in \mathcal{R}_0$ は明らかであり，$a, b \in \mathcal{R}_0$ のとき k を十分大きくして $(a+b)^k = \sum_{i+j=k} \frac{k!}{i!j!} a^i b^j$ を考えれば a^i か b^j のどちらかは 0 となるから，$a + b \in \mathcal{R}_0$ となる．つまり，$\mathcal{R}_0$ はイデアルである．$\mathcal{R}_0$ のことを**根基** (radical) という．

冪零元 a は $\forall p \in M$ に対し $p(a) = 0$ となる．なぜなら $p(a)^k = p(a^k) = 0$ だからである．したがって $\mathcal{O}$ の中の**根基は $\mathbb{R}$ への全射準同型という意味での点づくりには参加できないのである．**

このようなものは最初から $\mathcal{O}$ の中には入っていないのだとすれば話は簡単だが，せっかく思考を倒立させたいきさつから考えればこのようなものにも市民権を与えるほうが面白いであろう．

> 根基という概念は可換環の理論の中に当然存在しているのだが，保守的代数幾何の立場からは「質（たち）の悪い」ものとして排除の対象にしかならなかったものである．

根基の部分も図形的意味を持っているはずで，それは M 上の代数束として捉えられる．後の節 (3.3.2 項の後半も参照) で述べるグラスマン (Grassmann) 代数をファイバーとする外微分環がその典型的な例である．これは M の上部構造のようにも見えるが,「点の内部構造」のようにも見えるものである．

1.1.3　自己同型写像の群

$\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}$ の上への線形同型写像 φ で，$\forall f, g \in \mathcal{O}$ に対して $\varphi(fg) = \varphi(f)\varphi(g)$ が成立しているものを $\mathcal{O}$ の**自己同型**（または自己同型写像）という．

$\mathcal{O}$ の自己同型の全体を $G_{\mathcal{O}}$ と書く．これは写像の合成で積が定義されて群をなす．**群** (group) とは次のような集合のことである：集合 G が**群**であるとは，G の任意の 2 元 a, b に対し a, b の**積**と呼ばれる G の元 c が一意に定まり，これを $c = ab$ と書くとき，左の公準 (1)–(3) が成立する場合をいう．

(1) $a(bc) = (ab)c$　(結合律)
(2) **単位元**と称する元 $e \in G$ があり，
　$\forall g \in G$ に対して $ge = eg = g$
(3) $\forall g \in G$ に対して**逆元**と称する
　$g^{-1} \in G$ があって $gg^{-1} = e = g^{-1}g$

群の概念は「存在を認識すること」に深くかかわるので，数学に限らずさまざまなところに現れる．さらに，対象物に対する何らかの（われわれの）働きかけも全体として群をなしていることが多い．

群 G の部分集合 H が**部分群** (subgroup) であるとは，H が G で定義されている演算に関して**閉じ**ている場合をいう．つまり $g, h \in H$ のとき g^{-1}, gh などが H の元になる場合をいう．実際には $gh^{-1} \in H$ となっていればよい．

群 G の部分集合 N が**正規部分群** (normal subgroup) であるとは，$\forall g \in G$ に対して $N = gNg^{-1}$ という性質を持つ G の部分群のことである．ただし，gNg^{-1} は n を N の中全体にわたって動かしてできる集合 $\{gng^{-1}; \forall n \in N\}$ のことである．

$\mathcal{O}$ の自己同型群はかなり忠実に $\mathcal{O}$ の性質を反映していると考えられる．というか，われわれが対象物の性質を云々するときは結局自己同型群の性質（広い意味での対称性）を云々しているのである．この見方は第 3 章のクライン (Klein) やリー (Lie) の考え方を理解する上で大切である．つまり，われわれが語る対象物の性質（とくに幾何学的なもの）は，対象物の対称性でしかありようがないのである．

$\forall \varphi \in G_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{O}$ の任意の点 $p : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ に対し $p \circ \varphi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ は $\mathcal{O}$ の点である．

$p \circ \varphi$ を $\varphi_*(p)$ と書いて $p \to \varphi_*(p)$ という写像と思うことにする．M の開集合族のつくられ方を思い出せば $\varphi_* : M \to M$ が同相写像ということが自然にわかるだろう．

点 p をどう思うかで記号の使われ方が違うが，次のようになる：

$$(p \circ \varphi)(f) = p(\varphi f) = (\varphi f)(p) = f(\varphi_*(p)). \tag{1.2}$$

拝点主義の立場では同相写像 $\varphi_* : M \to M$ がまず与えられると考えるのだが，この場合には φ_* を $\psi : M \to M$ と書き，φ の方を ψ^* と書く．

$\mathcal{O} = C^\infty(M)$ の場合，写像 $\varphi_* : M \to M$ は C^∞-**可微分同相** (diffeomorphism) と呼ばれる．

$\forall \varphi \in G_\mathcal{O}$ について $\varphi(\mathcal{R}_0) = \mathcal{R}_0$ である．面白いのは $\varphi_* : M \to M$ が恒等写像であっても φ そのものは $\neq 1$ となる場合があることで，

$$\mathcal{N}_\mathcal{O} = \{\varphi \in G_\mathcal{O}; \varphi_* = 1\} \quad (\varphi_* = 1 \text{ という条件を満たす } \varphi \text{ の全体の意味})$$

は $G_\mathcal{O}$ の正規部分群である．$\mathcal{N}_\mathcal{O}$ は点の集合 M に対しては何もしないのだが，どのような役割を負うのだろうか？

1.2　同値律と群

再び，「世界経済」といったような，何かわれわれが科学したいと思っているものを 1 つ想定してもらいたい．まず何をするか？　まず，言葉や概念を構成し,「同じもの」をひとくくりにしなければなるまい．ところで同じものって何だろう？　「同じビーダマが 2 つある」という言葉に矛盾を感じない人でも「同一人物が 2 人いる」といわれれば矛盾を感じるだろう．**絶対的な意味で同じものが 2 つあるのはそもそも矛盾**であろう．

われわれは何らかの基準や判定法を設けて「(その意味で) 同じ」といっているのである．数学ではこれを「同値関係を設定する」という．**同値関係**とは左の 3 つの性質を満たす関係 $\sim$ をいうが，これはわれわれが使う「同じ」という言葉の持っている最低条件を書いたものである．a と同値な元全体を a の**同値類**と呼ぶ（記号として $[a]$ と書くことが多い）．

(1) $a \sim a$
(2) $a \sim b \to b \sim a$
(3) $a \sim b, b \sim c \to a \sim c$

われわれが使っている「言葉」とはすべて何かの同値類に付したラベルである．

【例 1.1】　V を線形空間，その線形部分空間を W としたとき，V に同値関係 $\sim$ を $a \sim b \Leftrightarrow a - b \in W$ で入れる．これが同値関係であることは容易にわかる．同値類を $[a]$ のように書くことにし，同値類の全体を**商空間**と呼んで V/W

と書く．これは $\alpha[a]+\beta[b]=[\alpha a+\beta b]$, $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ という演算で再び線形空間となる．V/W は W の元をすべて零扱いにした線形空間である．

1.2.1 群の作用

認識の対象となるものに同値関係を設定するには別の戦略を持たねばならないが，ピアジェ(Piaget) の発達心理学によればそのために人が心の内側に持たねばならないものは「群の作用」である．人は自分の行動を通してのみ対象を認知するのである．それが再現可能という論理性を持ち得るためには，持つべき戦略は群でなければいけないというのがピアジェの主張するところである．

群 G が集合 S に**作用する**とは**作用**と呼ばれる写像 $\lambda: G\times S\to S$ があり，$\lambda(g,s)$ を $\lambda(g)(s)$ のように書いたとき左の性質を持つ場合をいう．$\lambda(g): S\to S$ が恒等写像になるのが $g=e$ のときだけの場合，$\lambda: G\times S\to S$ は**忠実な作用** (faithful) であるという．

(1) $\forall s\in S, \forall g, \forall h\in G$ について，
$\lambda(g)(\lambda(h)(s))=\lambda(gh)(s)$
(2) $\forall s\in S$ について $\lambda(e)(s)=s$

G が集合 S に作用しているとして，その作用を λ とする．このとき，同値関係 $\sim$ を

$$s\sim s' \iff \exists g\in G,\ \lambda(g)(s)=s' \text{（右の等式を成り立たせるような } g \text{ が存在する）}$$

とする．つまり，群の作用で移り合うものは同じものと見るのである．

この場合，$\lambda(g)$ は**比べてみる行為**と解釈し，$\lambda(g)(s)=s'$ は s を s' と**比べて同じと判断したことだ**と考えるとよい．$\lambda(g)(s)=s'$ のときに両辺に g^{-1} を作用させてみると $\lambda(g^{-1})(\lambda(g)(s))=\lambda(g^{-1})(s')$ だが，左辺は $\lambda(g^{-1})(\lambda(g)(s))=\lambda(e)(s)=s$ である．

この立場では群の概念を後で述べる曖昧被覆群のようなもう少し広いものに替えることは重大な哲学的変更である．しかし，量子論はどうやらそこまで要求しているかに見えるのである．

同値律が定義されていることは次の表を見てもらいたい：

(1) $s \sim s$ $\lambda(e)(s) = s$

(2) $s \sim s' \Rightarrow s' \sim s$ $\lambda(g)(s) = s' \Rightarrow \lambda(g^{-1})(s') = s$

(3) $s \sim s', s' \sim s'' \Rightarrow s \sim s''$ $\lambda(g)(s) = s', \lambda(h)(s') = s''$

$\Rightarrow \lambda(hg)(s) = s''$

ピアジェの考え方をここで思い出してもらいたい．個人があるものを認識するという過程を素直にたどってみればこういうことだったのではないのかとピアジェは言っているのである．しかし同値関係といってもさまざまなレベルがある．生物学は「生物」という概念でひとくくりにされたものを扱う学問だが，生物の分類の目，類，族，科，種といった階層を考えてもらえば理解できるだろう．大まかな分類では同類に見えるものも細かく分類されるのである．

部分群

このような階層を持った同値関係を設定するには 1 つの群だけを考えていたのではだめで，その部分群を同時に考えないといけない．

G が S に作用していれば，部分群 H も S に作用しているわけだが，G を使った同値関係より，H を使った同値関係のほうが細かい分類になっていることは明らかであろう．したがって，階層を持った同値関係を考えるには部分群の列

$$G_0 \supset G_1 \supset \cdots \supset G_{n-1} \supset G_n$$

を考えねばならない．この場合，群が大きくなるにつれて，その作用によって同値とみなされひとくくりにされる（概念化される）ものが大きくなる．

しかも，いやしくも科学と名の付くようなものの一部分について考えているのだとすると，上の部分群の系列はおそらく上にも下にも無限に続いているはずのものである．われわれはいつでも途中から始まって途中で終わるような言葉で表現しているのである．

最大の群の推移性

上の話では G_0 による分類が最も荒っぽい分類ということになるが，よく考えてみると，われわれが科学することができるのは何らかの意味での荒っぽい分類で同じ類に属するものに限られる．たとえば世界の経済状態を考えて，ここに同値関係を設定しようとすると，われわれはまず，「どんなものが世界の経済状態といえるものか」という判断基準を持っていなければなるまい．つまり，

対象とできるのは「世界の経済状態」という概念でひとくくりにできるものに限られる．群の作用で同値関係が定義されるのだという考えに立てば最大の G_0 による同値関係では M の元は全部同じ（同値）に見えているものとしてよいであろう．つまり，$\forall s, s' \in M$ に対して，$g \in G_0$ をうまくとると，$s' = \lambda(g)(s)$ とできるとしてよい．

このようなとき，G_0 が M に**推移的** (transitive) に作用しているという．

例示による定義の数学性

> 例示による定義が数学的定義になるのは，群作用がはっきりしているときのみである．

数学以外のところでは概念を定義するときに，いくつかの例を示して「このようなもの」といって定義としてしまうことが多い．これは厳密な数学的定義ではないことが多いのだが，けっしていい加減なものではない．われわれは「このようなもの」と言われるとわかったような気分になるわけだが，これはその例示，およびそのとき述べられるこまごましたコメントをもとに常識的に動かせるパラメーターを全部動かしていろいろな変形を考え，そこから総体が類推できるからであろう．

G が M に推移的に働いている場合には M そのものが G から構成される．G の作用を $\lambda : G \times M \to M$ としておく．$s_0 \in M$ を任意に 1 つ固定し，これを**標準元**（または参照元）と呼ぶことにする．

認識の対象で，同値関係の設定の対象である集合 M には群 G が推移的に作用していなくてはならないという主張である．

> G が M に推移的に働く場合のみが精密科学の対象になり得る．

これは，認識の対象まで「比べてみる」といった**行動**によって獲得したのだという考え方を強く出したものだといえる．前節までは M または $\mathcal{O}$ が最初に与えられないといけなかったのだが，ここでは G が最初に与えられないといけないという考えである．これを**行動主義**と呼んでおこう．

状態の空間も G から構成されると考える．まず $\mathcal{O}$ がなければならないという考え方とは違うものである．すると，$\mathcal{O}$ とか「観測」というものも G の方から別に考えるべきものとなる．

等方部分群

s_0 を標準元とする．$g \in G$ に対して $\lambda(g) = \lambda(g)(s_0)$ と定義する．$\lambda(g) = s$ は，$s \in S$ が標準元 s_0 に許されている変形を行なって得られることを示している．λ は G から S の上への写像（全射）となっている．λ が群の作用であることから，$H = \{h \in G; \lambda(h)(s_0) = s_0\}$（$s_0$ を動かさない元全体）は G の部分群になるが，これを s_0 の**等方** (isotropy) **部分群**と呼ぶ．$\forall h \in H$ に対して

$$\lambda(gh) = \lambda(g)(\lambda(h)(s_0)) = \lambda(g)(s_0) = \tilde{\lambda}(g)$$

となる．これを $\lambda(gH) = \lambda(g) = s$ のように書いてもよいであろう．つまり，G の部分集合 gH は S の元 s と思ってよいわけである．

行動全体も群をなすと思ってよいであろう．人間の認識の原理原則をいっているだけだから，ここでは観測論は無関係である．

1.2.2　同値関係の設定，均質空間

G の部分群 H が与えられたとして，こんどは集合 G に同値関係 $\sim$ を

$$g \sim h \Longleftrightarrow g^{-1}h \in H$$

によって設定する．これが前に述べた同値関係であること，g の同値類 $[g]$ が gH であることは容易にわかるであろう．各同値類を元とする集合を**同値類の集合**と呼んで，$G/\sim$ とか G/H と書く．集合 S は自然に G/H と考えてよいから，$S = G/H$ のように思ってしまってよい．G/H は**商空間**と呼ばれるが，とくに空間として意識されるときには**均質空間** (homogeneous space) と呼ばれる．g に $[g]$ を対応させる写像を**射影**と呼んで $\pi : G \to S$ などと書く．

N が G の正規部分群のときには商空間 G/N は自然に群になる．これを**商群**と呼ぶ．この場合 $\pi : G \to G/N$ は準同型写像である．

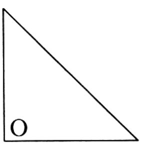
1.2.3 クライン幾何学

時代はむろん前後するが，ピアジェの心理学を認める立場ならばクラインの幾何学の立場が理解できよう[7)]．クラインはいう，

> クライン
>
> 群の作用があれば，それに属する幾何学がある．

つまり群 G の作用による変換で不変な概念の総体が，G およびその作用に属する幾何学だというのである．同値関係を設定してしまえば，それによる言語系がつくれるのだが，それが幾何学と呼べるような内容を持つためには変換群を使った同値関係の設定でないといけないとクラインは主張しているのである．このことを簡単な例で説明してみると次のようになる．

平面 $\mathbb{R}^2$ を考え，$\mathbb{R}^2$ 上に描かれた三角形の全体を Δ とする．G, H をそれぞれ $\mathbb{R}^2$ 上のアフィン変換群（平行移動，線形変換の合成からなる群），合同変換群とする．G は Δ に推移的に作用している．



標準元として直角二等辺三角形 $\triangle$ をとる．O を原点のように考えて，ベクトルの考え方を使うと，任意の三角形は $\triangle$ にアフィン変換をほどこして得られることが容易にわかる．これが三角形という大枠を決めている．

つまり，アフィン変換によって同値関係を入れれば，すべての三角形は直角二等辺三角形に同値である．各辺の中点とか，重心といった概念はアフィン変換で変わらない．このようにアフィン変換で不変な概念だけを使って展開する幾何学をアフィン（疑似）幾何学[8)]という．

アフィン変換でひとくくりにされた三角形全体に今度は合同変換群 H で同値関係を入れる．これは合同のものを同値とみるということである．

この変換群で不変な概念とは，距離とか角度などであり，これらを用いて述べるのがユークリッド (Euclid) 幾何である．三角形の合同条件については「1 辺と両端の角」「2 辺と挟角」「3 辺」といったようによく知られているから，ここでは繰り返さない．

---

7) 話は逆でピアジェという人は数学の発達史（系統発生）を個人の発達史（個体発生）に置き換えるという方法論で発達心理学を考えようとしたように思える．

8) アフィンとは「疑似」の意味．ユークリッド幾何だけが本物と思われていた時代の用語．

群の考え方は幾何学の世界にとどまらないで，精密概念，精密言語を定義していくときに必ず現れる．

> われわれが科学できる対象は包括者 (das Umgreifende) から，何らかの意味で切り離され，同じものとみなされたものについてのみである．科学は宗教とは違って，行なうのは各論のみである．

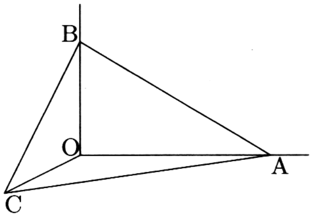
しかし，クラインは群であれば何でもよいと考えているわけではない．群は今日の言葉で**位相群**と呼ばれるものに限られているし，作用 $\lambda: G \times S \to S$ も連続なものに限られている．

クラインと同世代のリーも同じような考えを持っていたように思うが，群のほうは現代数学でリー群と呼ばれている多様体の構造まで持っている群（または局所群）でなければならないと考えていたように思える．これについてはもう少し後で述べる．

1.3 グラスマン代数

正規直交座標系の入ったユークリッド空間の中の下のような図形で（O から出ている 3 本の線は互いに直行している）

$$(\triangle \mathrm{ABC})^2 = (\triangle \mathrm{OBC})^2 + (\triangle \mathrm{OAC})^2 + (\triangle \mathrm{OAB})^2$$



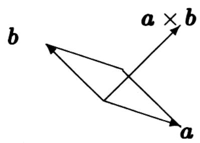
が成立する．これを立体ピタゴラス (Pythagoras) の定理と呼ぶ．証明は △ABC の計算法がわかれば簡単である．グラスマン代数を理解するにはこのことの証明や意味をじっくり考えることである．（どうして，このようなことが成立するのだろうかと考えることは大切.)

グラスマンは排除の対象になるようなラジカルな人ではなかったようだが，数学者としてはあまりめぐまれた人ではなかったようである．

1.3.1　裏表のある面積，体積

E^3 を 3 次元ユークリッド空間とする．ベクトルというのは**変位** (displacement) のことであると教わる．普通は矢印を書いて表現する．変位というのは大きさと方向と向きだけを持ったものであるから矢印をどこに並行移動してもよい．E^3 の正規直交基底の 1 つを $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ とし，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ を E^3 の中のベクトルとして以下の話をする．

ベクトル積 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ についてはよく知っていると思うが，これは 2 つのベクトルから 1 つのベクトルを得る演算（2 項演算）で，方向は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ に垂直で，大きさは $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ でつくる平行四辺形の面積で，向きは $\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へ右ねじをまわしたときのねじの進行方向として定義されている．



数学は単位系のないものを扱うからこれで構わないが，cm^2 を cm に置き換えている定義に見えて気持悪い人も多いのではなかろうか？ $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}$ である．しかし，2 項演算であるから $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c}$ といったように続けられる．このようなものはたとえば $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ とか群演算のように数学の中にはたくさん存在している．しかしベクトル積は他の多くの 2 項演算と違って，一般に $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \times \boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ であって結合律が成立していない．

正しくは $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}$ となるのだが，これは

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) + \boldsymbol{b} \times (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} \times (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0 \quad \text{（ヤコビ (Jacobi) の恒等式）}$$

を満たしている．このような恒等式は後でよく現れる．これを巡回和と呼んで次のように書くことが多い：

$$\sum\nolimits_{(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})} \boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = 0.$$

その一方で **3 重積**と呼ばれる $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})$ は $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$ であって何やら結合律らしきものがある．これは計算すれば

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

であり，$\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ のどの 2 つを入れ換えても符号が変わる．この性質を**交代** (alternative) **性**と呼ぶ．**行列式というのは裏表のある体積の概念**で，これの絶

対値は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ がつくる平行六面体の体積を表している．ベクトル積はその定義より

$$\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_2 \tag{1.3}$$

であることはすぐわかるだろう．ベクトル積の計算はこれだけ知っていれば実行できて，$\boldsymbol{a} = \sum_{i=1}^3 a^i \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^3 b^i \boldsymbol{e}_i$ のように成分表示すると

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j\, \boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j$$

だが，$\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \times \boldsymbol{e}_i$, $\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_i = 0$ だから

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \sum_{k<l} (a_k b_l - a_l b_k) \boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_l$$

となり，$\boldsymbol{e}_k \times \boldsymbol{e}_l$ を上の (1.3) 式で求めて

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1 + \begin{vmatrix} a_3 & a_1 \\ b_3 & b_1 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_3$$

のように計算される．

> グラスマン代数は行列式の持つ交代性に注目し，ベクトル積に結合律がないという不便さを取り除き，おまけに何次元のベクトルについても計算できるように工夫されたものである．

グラスマン代数における積を**外積** (exterior product) と呼ぶが，外積は左辺の $\boldsymbol{e}_i \times \boldsymbol{e}_j$ を**計算しないで**そのまま $\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$ という記号で残しておくことから自然に得られる（これで単位系に対する気持の悪さもなくなる）．ただし，

$$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j = -\boldsymbol{e}_j \wedge \boldsymbol{e}_i, \quad \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_i = 0 \tag{1.4}$$

としておく．つまり，

$$\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} a_i & a_j \\ b_i & b_j \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j \tag{1.5}$$

のように計算しここで止めるわけである．すると，$\boldsymbol{e}_i \wedge \boldsymbol{e}_j$ を何と考えるかが気になるであろうが，これを「$(\boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j)$ 平面（i, j の順番にも注意）上の面積要素」と考える．$\boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{e}_3$ と**しなかったことが味噌**で，おかげで 3 次元でなく一般の n-次元のベクトルでも (1.5) 式で外積 $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ が定義される．ただし，成分の個数は n 個の中から (i, j) を選び出す場合の数 ${}_n\mathrm{C}_2$ だけあることになる．

> 子供の頃をよく思い出してもらいたい．面積とは教室の黒板の右上に貼ってある小さな正方形を単位として，それの何倍であるかで決めていなかったろうか？

さらに，3 重積のことを考えて $\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c}$ が行列式となるように定義したい．これは上のものが $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ それぞれについて線形性がある（多重線形性）として，(1.4) 式をあてはめるだけでよい．次のように計算する： $\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k$ の中に同じものがあれば 0 だから，$\mathcal{S}(3)$ を 3 個の文字の置換全体（3! 個ある）の群（置換群という）として

次の式の計算は全部をていねいに書き出してみて理解すること．早わかりの方法はない．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} &= \textstyle\sum_{i,j,k=1}^{3} a_i b_j c_k\ \boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k \\
&= \sum_{\sigma\in\mathcal{S}(3)} \operatorname{sgn}\sigma\ a_{\sigma(1)} b_{\sigma(2)} c_{\sigma(3)}\ \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3
\end{aligned}
$$

となる．ここで $\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$ は何らかの意味では体積を意識してはいるのだが，E^3 の単位立方体 (体積を計るときの単位) そのものと考えるほうがよい．$\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3$ とか $\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_3\wedge\boldsymbol{e}_2$ のようなものは $\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$ が**裏返し**になったものと考えて，$-\boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3$ とするのである．一般には次のように考える：

$$
\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k = \operatorname{sgn}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & k \end{pmatrix} \boldsymbol{e}_1\wedge\boldsymbol{e}_2\wedge\boldsymbol{e}_3.
$$

n 次元ユークリッド空間 E^n の場合にはこの部分は，$\mathcal{P}(n,3)$ を $1 \sim n$ から同じものを含まない 3 個の数字列を選び出して並べたものの全体とすると

$$
\boldsymbol{a}\wedge\boldsymbol{b}\wedge\boldsymbol{c} = \sum\nolimits_{i,j,k=1}^{n} a_i b_j c_k\ \boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k = \sum\nolimits_{(i,j,k)\in\mathcal{P}(n,3)} a_i b_j c_k\ \boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k
$$

となるのだが，$\mathcal{P}(n,3)$ の元の数は ${}_n\mathrm{P}_3 = {}_n\mathrm{C}_3 \times {}_3\mathrm{P}_3 = {}_n\mathrm{C}_3 \times 3!$ だから，

$$
\begin{aligned}
&= \textstyle\sum_{i_1<i_2<i_3} \sum_{\sigma\in\mathcal{S}(3)} \operatorname{sgn}\sigma\, a_{i_{\sigma(1)}} b_{i_{\sigma(2)}} c_{i_{\sigma(3)}}\ \boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\boldsymbol{e}_{i_3} \\
&= \textstyle\sum_{i_1<i_2<i_3} \begin{vmatrix} a_{i_1} & a_{i_2} & a_{i_3} \\ b_{i_1} & b_{i_2} & b_{i_3} \\ c_{i_1} & c_{i_2} & c_{i_3} \end{vmatrix} \boldsymbol{e}_{i_1}\wedge\boldsymbol{e}_{i_2}\wedge\boldsymbol{e}_{i_3}
\end{aligned}
$$

n 個のものから，まず 3 個取り出して，取り出したものについての 3! 通りの並べ替えを考える．

とするのである．$\boldsymbol{e}_i\wedge\boldsymbol{e}_j\wedge\boldsymbol{e}_k$ は (i,j,k) 部分空間（順番にも注意! i,j などを入れ換えると空間は裏返しになると考える）における単位立方体と考える．

E^n における p 個のベクトル $\boldsymbol{a}_1, \cdots, \boldsymbol{a}_p$ に対して $\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_p$ も同様に定義される．さらに

$$(\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_p) \wedge (\boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_q) = \boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_p \wedge \boldsymbol{b}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{b}_q$$

のように定義する．こうすれば結合律が成立することは自明であろう．

$\boldsymbol{a}_1 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_p$ のように書かれる元を **p-次斉次の元**と呼び p-次斉次の元どうしの 1 次結合全体のつくる線形空間（${}_n\mathrm{C}_p$-次元）を $\Lambda^p(n)$ と書き，

$$\Lambda^*(n) = \Lambda^0(n) \oplus \Lambda^1(n) \oplus \cdots \oplus \Lambda^n(n)$$

とする．$\oplus$ は線形空間の直和を表す．ここで $\Lambda^0(n) = \mathbb{R}$ としている．$\Lambda^n(n)$ までしかないのは $\Lambda^{n+1}(n) = \{0\}$ （n 個のものから $n+1$ 個選べば必ず同じものが 2 個以上あるため）だからである．$\dim \Lambda^*(n) = 2^n$ である．

線形空間の向き

線形空間の**向き**とは線形空間自身に備わっているものではなく，その基底まで考えて定義する概念である．基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ と基底 $(\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_m)$ が行列式が正の行列を使って $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m) = (\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_m)A$ のように結ばれているとき $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ と $(\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_m)$ とは**同じ向き**であるというのである．

分配法則が成り立つようにして積 $\wedge$ の計算を拡張すれば，$\Lambda^*(n)$ は非可換代数となる．$\Lambda^*(n)$ を**グラスマン代数**と呼ぶ．

さらに，細かい説明のために

$$\Lambda^{(+)}(n) = \bigoplus_{k \geq 1} \Lambda^k(n), \quad \Lambda^{ev}(n) = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k}(n), \quad \Lambda^{od}(n) = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^{2k+1}(n)$$

とする．$\Lambda^{ev}(n)$ は $\Lambda^*(n)$ の部分代数となる．

しかし，たとえば $\Omega = \boldsymbol{e}_1 \wedge \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3 \wedge \boldsymbol{e}_4$ のような元は $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b}$ のように表せないことに注意しておかなければならない．これは表せたとすると $\boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{a} = 0 = \boldsymbol{a} \wedge \boldsymbol{b} \wedge \boldsymbol{b}$ だから $\Omega \wedge \boldsymbol{x} = 0$ で $\boldsymbol{x} \neq 0$ のものがなければならないが，実際には $\boldsymbol{x} = 0$ しかないからである．次のことは容易にわかるであろう．

命題 1.1 $\Omega \in \Lambda^p(n)$ が $\Omega = \boldsymbol{a}_1 \wedge \boldsymbol{a}_2 \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{a}_p$ のように書かれるための必要十分条件は $\Omega \wedge \boldsymbol{x} = 0$ となる $\boldsymbol{x} \in \Lambda^1(n)$ の全体が p-次元線形部分空間になることである．

グラスマン代数 $\Lambda^*(n)$ において**対称積**を $a \circ b = \frac{1}{2}(a \wedge b + b \wedge a)$ と定義する．

補題 1.3　$(\Lambda^*(n); \circ)$ は可換結合代数である．$\Lambda^{(+)}(n)$ は根基である．

> グラスマン代数は面積とか体積の概念の代数化であるからわれわれが幾何図形を考えるときに必ず現れる代数構造である．非可換代数ではあるが，対称積が結合律を満たし大きな根基を持っている．

$\Lambda^p(n)$ の一般の元は

$$g = \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n} a_{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p}, \quad a_{i_1 \cdots i_p} \in \mathbb{R}$$

という形で書かれるが，後のほうでは**アインシュタイン方式**といって総和記号を用いず，上下に同じ添字があればすべて独立に 1 から n までを動かして総和するという書き方を採用することもある．この方式で上の g を書くには係数 $a_{i_1 \cdots i_p}$ の添字を上に上げ，さらに $\forall \sigma \in \mathcal{S}(n)$（$n$ 個の文字の置換全体）に対して $a^{i_{\sigma(1)} \cdots i_{\sigma(p)}} = \mathrm{sgn}\ \sigma\ a^{i_1 \cdots i_p}$ のように，交代性を持つように係数の添字の動ける範囲を拡張しておいて，次のように書くのである：

$$g = \frac{1}{p!} a^{i_1 \cdots i_p} \boldsymbol{e}_{i_1} \wedge \boldsymbol{e}_{i_2} \wedge \cdots \wedge \boldsymbol{e}_{i_p} \quad (i_1, \cdots, i_p \text{ は独立に } 1 \sim n \text{ を動いて総和する})$$

$\mathbb{R}^n$ の線形変換の全体を $GL(n)$ と書き**一般線形群** (general linear group) と呼ぶ．平行移動の群 $\mathbb{R}^n$ と $GL(n)$ とを合わせた群（半直積群）に属するクラインの意味の幾何学がアフィン幾何学であった．$SL(n) = \{A \in GL(n); \det A = 1\}$ を**特殊線形群** (special linear group) という．

平行移動の群 $\mathbb{R}^n$ と $SL(n)$ とを合わせた群（半直積群）に属するクラインの意味の幾何学はアフィン幾何学の一部ではあるが，ここでは面積とか体積という概念が使える．グラスマン代数というのはまさしくこの群に属するクライン幾何学の代数的側面を代表するものなのである．

1.3.2　微分形式

微分形式というととっつきにくいものと思われがちだが，これはすでに初等物理の中に登場している．ただし，アインシュタイン方式も使うかもしれ

ないので以下では $x_1, \cdots, x_n$ を $x^1, \cdots, x^n$ のように書くことにする．3 次元ユークリッド空間 E^3 で，$\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ を正規直交基底とし，$\boldsymbol{x} = (x^1, x^2, x^3)$ はこの正規直交基底に関する座標関数とする．E^3 の上に重力場のような力の場 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^3 F_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i$ があるとしたとき，単位質量の質点の微小変位 $\boldsymbol{ds}$ にともなう仕事量は普通 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{ds}$ で与えられるが，これは

$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) \cdot \boldsymbol{ds} = \sum F_i(\boldsymbol{x}) dx^i$$

のように書かれる 1 次微分形式のことである．

> 微分形式とは前節で $\boldsymbol{e}_i$ と書いていたところを dx^i と書き，
>
> $$\omega = \sum a_{i_1 \cdots i_p} dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p} \quad \text{（何方式か気にしなくてよい）}$$
>
> の係数 $a_{i_1 \cdots i_p}$ の部分が $(x_1, \cdots, x_n)$ の関数 $a_{i_1 \cdots i_p}(x_1, \cdots, x_n)$ になっているだけのもので，計算は $(x_1, \cdots, x_n)$ のところに数が入っていると思って点ごとにグラスマン代数での計算をするものである．

古典熱力学では PdV などという記号も使っているし，状態の微小変化にともなって熱機関が吸収する熱量なども 1 次微分形式として書かれている．

次に E^3 が何かの流体で満たされていて流れている場面を想像しよう．流れは定常状態（時間変化なし）とし，$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^3 v_i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i$ をこの流体の流速ベクトル場とする．

これを単位質量 m の流体粒子が押し合いへし合いしながら流れていくイメージで考えれば点 $\boldsymbol{x}$ での運動量 $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x})$ は $m\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ であるが，これは一般力学系の立場からは $\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^3 m v_i(\boldsymbol{x}) dx^i$ のように 1 次微分形式の形で書かれるべき式である．

また，流束 (flux) と呼ばれる $\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{dS}$ は単位時間に dS を通過する流量として定義されているが，これは数学の立場からは

$$\boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} dS = v_1 dx^2 \wedge dx^3 + v_2 dx^3 \wedge dx^1 + v_3 dx^1 \wedge dx^2$$

のように 2 次微分形式の形に書かれるべき式である．これは電束とか磁束といったものにもあてはまる． （これはベクトル解析の教科書に詳しく書いてあるから，ここでは省略するが微分形式でそのまま理解できるならばベクトル解析的理解は不要である．）

外微分，引き戻し

微分形式が使いやすいとされるのは，実は理由がある．その理由を 2 次の微分形式 $\sum_{i<j}\omega_{ij}(\boldsymbol{x})dx^i\wedge dx^j$ で説明しよう．

すでにお気づきとは思うが，総和記号のところが $\sum_{i,j=1}^n$ となったり $\sum_{i<j}$ となったりしている．この 2 つはむろん意味が違うわけで，前者は i, j が独立に 1 から n までを動くのに対して後者は $1\leq i<j\leq n$ の条件を満たす (i,j) の組全体での総和である．前に述べたルールを考慮すれば

$$\sum_{k,l=1}^{n}\omega_{kl}dx^k\wedge dx^l=\sum_{i<j}(\omega_{ij}-\omega_{ji})dx^i\wedge dx^j$$

であるが，右辺のような書き方をしない限り，書き方に一意性がないわけで，左辺が 0 だからといって $\omega_{kl}=0$ となるわけではない．

$\sum_{i<j}\tilde{\omega}_{ij}dx^i\wedge dx^j$ のような書き方に直してはじめて $=0$ から係数 $\tilde{\omega}_{ij}=0$ が結論されるわけである．上のように一意性がない書き方の微分形式を**未整理の微分形式**と呼ぶ．

> 長い歴史のあるところでは記号法も教育用に便利になっていることが多いが，それを安直に誤解してはいけない．

実は微分形式をいつも一意性が出てくるような書き方で書くのは案外煩雑なもので，たとえば

$$\begin{aligned}&\sum_{i,j,k=1}^{n}\omega_{ijk}dx^i\wedge dx^j\wedge dx^k\\&=\sum_{i_1<i_2<i_3}\left(\sum_{\sigma\in\mathcal{S}(3)}\operatorname{sgn}\sigma\,\omega_{i_{\sigma(1)}i_{\sigma(2)}i_{\sigma(3)}}\right)dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\wedge dx^{i_3}\end{aligned}$$

のようにしなければならない．

微分形式のよいところはこのような整理整頓は一番最後に行なえばよく，**途中の計算はおろか，定義でさえも未整理のままで行なってよい**ということが知られているところにある（本当のことをいえば未整理で行なっても大丈夫なものしか定義として採用されていないというべきであるが）．微分形式の計算が強力な理由はこのせいである．

一例として**外微分**を定義しておこう．$\omega=\sum_{k,l=1}^{n}\omega_{kl}(\boldsymbol{x})dx^k\wedge dx^l$（未整理）に対し外微分 $d\omega$ は

$$d\omega=\sum_{k,l=1}^{n}d\omega_{kl}\wedge dx^k\wedge dx^l$$

で定義する．$d\omega_{kl}$ のところには $\sum_i(\frac{\partial}{\partial x^i}\omega_{kl})dx^i$ を代入するだけである．これで ω の書き方によらない定義になっていること（well defined という）は，1回は自分で確認したほうがよいが，大丈夫なのである．p-次微分形式についても同様に定義する．

任意の微分形式について $d^2\omega = d(d\omega) = 0$ が成立しているのであるが，これは未整理のまま行なってよいということを認めれば $d^2 f = 0$ を確認するだけでよい．ω が p-次微分形式のときには

$$d(\omega\wedge\omega') = (d\omega)\wedge\omega' + (-1)^p\omega\wedge d\omega' \tag{1.6}$$

となることなどが容易にわかる．もっと便利なのは座標変換とか変数の制限に対する**引き戻し**と呼ばれる計算法で，$\boldsymbol{x} = \varphi(\boldsymbol{y})$，つまり

$$x^i = \varphi^i(y^1, \cdots, y^m), \quad 1 \leq i \leq n$$

のように $\boldsymbol{x}$ が別の変数 $\boldsymbol{y}$ で書かれたとき，たとえば

$$\omega = \sum\nolimits_{k,l=1}^{n}\omega_{kl}(\boldsymbol{x})dx^k\wedge dx^l$$

は変数 $\boldsymbol{y}$ を使ってどのように書かれるかというと，たんに $\boldsymbol{x}$ のところに $\varphi(\boldsymbol{y})$ を代入すればよいのである．つまり

$$\varphi^*\omega = \sum\nolimits_{k,l=1}^{n}\omega_{kl}(\varphi(\boldsymbol{y}))d\varphi^k\wedge d\varphi^l$$

とすればよい．

引き戻し $\Longleftrightarrow$ 代入計算

むろん $d\varphi^k = \sum_{i=1}^m(\frac{\partial}{\partial y^i}\varphi^k)dy^i$ とするのであるから，たとえ ω が整理して書かれていても $\varphi^*\omega$ は未整理のものになってしまう．しかし未整理のまま計算してよいということを認めてしまえば，合成関数の微分規則から

$$\varphi^*(\omega\wedge\omega') = (\varphi^*\omega)\wedge(\varphi^*\omega'), \quad \varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega) \tag{1.7}$$

が容易にわかるであろう．$\varphi^*\omega$ は ω の φ **による引き戻し**と呼ばれる．

微分形式は未整理のまま計算してよいというのが最大の強みである．数学の厳格な立場だとこれはきちんと証明すべきところである．この作業を自分でやってみるといろいろな発見ができるだろう[9]．

微分形式には外微分という微分の概念があったが，それに対応して積分の概念もある．これについては図形の向きという概念をしっかりさせてからでないと誤解の種だから，この本では扱わない（文献 [28] 参照）．

1.3.3 多様体上の外微分環

U を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合とし，$\mathcal{F}_U^{(p)}$ を U 上で定義された C^∞ p-次微分形式の全体，$\mathcal{F}_U^{(0)} = C^\infty(U)$（$U$ 上の C^∞-関数の全体）としよう．さらに

$$\mathcal{F}_U^* = \mathcal{F}_U^{(0)} \oplus \mathcal{F}_U^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_U^{(n)}$$

とする．$\mathcal{F}_U^*$ は積 $\wedge$ に関して非可換な結合代数となる．これを U 上の**外微分環**と呼ぶ．次は容易であろう．

補題 1.4 C^∞-可微分同相 $\varphi : U \to U$ による引き戻し写像 φ^* は外微分環 $(\mathcal{F}_U^*, \wedge)$ の同型写像である．

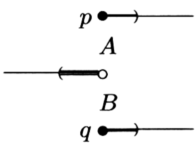
C^∞-多様体 M とは互いの座標変換が C^∞-可微分同相であるような座標近傍系で覆われた T_2-位相空間のことであったから，V_α を座標近傍とし，$M = \bigcup_{\alpha \in I} V_\alpha$ を座標近傍による M の被覆としよう．

いかなる意味を付けようとも多様体上の微分形式の具体的表示は各座標近傍上で座標関数を使った表示を並べる以外ありようがないものである．まったく同様に多様体上の点の具体的表示も各座標近傍上での座標を並べるしかないのである．

【例 1.2】 多様体の定義も単なる座標近傍系のパッチワークとして定義してもよいのだが，これを実行すると次の例のように位相空間としては T_2-分離公理を満た

9) 微分形式を使いこなすというのは物理学科の学生の目標になっているようだが，これをきわめて安直に使っているらしい人に出会ったら，整理，未整理の部分を聞いてみるとよいだろう．

さないものまで取り込んでしまって何かと面倒なのである．



左の図で p の近傍は A の部分，q の近傍は B の部分とすると，このパッチワークでできたものは座標近傍で覆われているという意味では多様体ではあるが T_2-分離公理を満たさない．このような "多様体" まで許す理論もあるが，これを防ぐにはパッチワークでできあがる空間が T_2-分離公理を満たすという条件を**手で付け加える**しかない．

多様体上で外微分環の計算をするには局所座標系を使って表示して行なえばよい．$\mathcal{F}_M^{(p)}$ を多様体 M 上の C^∞ p-次微分形式の全体とする．これは各局所座標系で表示したとき C^∞ p-次微分形式として書かれるもの全体という意味である．$\mathcal{F}_M^{(0)} = C^\infty(M)$ としよう．線形空間としての直和を表す記号を $\oplus$ として，

$$\mathcal{F}_M^* = \mathcal{F}_M^{(0)} \oplus \mathcal{F}_M^{(1)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_M^{(n)}$$

とする．さらに，$\quad \mathcal{F}_M^+ = \mathcal{F}_M^{(1)} \oplus \mathcal{F}_M^{(2)} \oplus \cdots \oplus \mathcal{F}_M^{(n)},$

$$\mathcal{F}_M^{ev} = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{F}_M^{(2p)}, \quad \mathcal{F}_M^{od} = \bigoplus_{p \geq 0} \mathcal{F}_M^{(2p+1)}$$

とする．多様体上の外微分環 $\mathcal{F}_M^*$ の性質をまとめると，$\omega^{(p)} \in \mathcal{F}_M^{(p)}$ として

$$\begin{aligned}
&\omega^{(p)} {\scriptstyle\wedge} \omega^{(q)} = (-1)^{pq} \omega^{(q)} {\scriptstyle\wedge} \omega^{(p)}, \\
&\omega^{(p)} {\scriptstyle\wedge} (\omega^{(q)} {\scriptstyle\wedge} \omega^{(r)}) = (\omega^{(p)} {\scriptstyle\wedge} \omega^{(r)}) {\scriptstyle\wedge} \omega^{(q)}, \\
&d(\omega^{(p)} {\scriptstyle\wedge} \omega^{(q)}) = (d\omega^{(p)}) {\scriptstyle\wedge} \omega^{(q)} + (-1)^p \omega^{(p)} {\scriptstyle\wedge} (d\omega^{(q)}).
\end{aligned}$$

${\scriptstyle\wedge}$ 積に関する交換子積を $[\omega, \omega']_\wedge = \omega{\scriptstyle\wedge}\omega' - \omega'{\scriptstyle\wedge}\omega$ で定義すれば

$$[\mathcal{F}_M^{ev}, \mathcal{F}_M^*]_\wedge = \{0\}, \quad [\mathcal{F}_M^*, \mathcal{F}_M^*]_\wedge \subset \mathcal{F}_M^{ev}$$

だから，$[\mathcal{F}_M^*, [\mathcal{F}_M^*, \mathcal{F}_M^*]_\wedge]_\wedge = \{0\}$ である．そこで**対称積**と呼ばれるものを

$$\omega{\circ}\omega' = \frac{1}{2}(\omega{\scriptstyle\wedge}\omega' + \omega'{\scriptstyle\wedge}\omega) \tag{1.8}$$

で定義してやると，$\omega \in \mathcal{F}_M^{ev}$, $\omega' \in \mathcal{F}_M^*$ のときには $\omega{\circ}\omega' = \omega{\scriptstyle\wedge}\omega' = \omega'{\circ}\omega$, $\omega, \omega' \in \mathcal{F}_M^{od}$ のときには $\omega{\circ}\omega' = 0$ となり，この積も結合律を満たしていることが容易にわかる．すると $\mathcal{O} = (\mathcal{F}_M^*; \circ)$ のようなことは当然考えられる．

$(\mathcal{F}_M^*;\circ)$ の根基は $\mathcal{F}_M^+$ である．しかし，ここまでくると $\mathcal{O}$ が可換環でなければならない理由も薄れてくるから $\mathcal{O}=(\mathcal{F}_M^*;\wedge)$ という考えも当然出てくるであろう．すると「点」にあたるものをどう考えるかが問題となろう．

点概念の変更

点とは $(\mathcal{F}_M^*;\wedge)$ から $(\Lambda^*(n);\wedge)$ への全射準同型のことである．

試しに上のように考えてみよう．ただし $\Lambda^*(n)$ は $\mathbb{R}^n$ の標準基底 $\boldsymbol{e}_1,\cdots,\boldsymbol{e}_n$ を使って元の表示が与えられているグラスマン代数である．

$(\mathcal{F}_M^*;\wedge)$ から $(\Lambda^*(n);\wedge)$ への全射準同型 ϕ は必ず $\phi(\mathcal{F}_M^{(+)})=\Lambda^{(+)}(n)$ という性質を持つ（次数を下げる準同型はない）から，ϕ は $C^\infty(M)=\mathcal{F}_M^*/\mathcal{F}_M^{(+)}$ から $\Lambda^*(n)/\Lambda^{(+)}(n)=\mathbb{R}$ への全射準同型を誘導する．そこで，これが定める点を p_ϕ とする．これがこれまで見てきた古典的な「点」である．問題なのは $p_\phi=p_{\phi'}$ でも $\phi\neq\phi'$ である場合がたくさんあるということである．素朴には 1 点 p_ϕ に見えていてもその中にいろいろあることになるのである．

これをどのように考えるべきであろうか？

ユークリッドの幾何学原論では「点とは位置のみあって，まったく内部構造を持たないもの」とされていた．

上の考えでは「点は確かに確定した位置を持っていて広がりは持たないが，豊富な無限小の構造を持つ」とでもしなければならなくなるわけである．

また古典的な点を固定して，その無限小構造から観測値を取り出すにはこれまでの p を決めるときの観測とは違うことをしなければならないはずだが，どのように考えたらよいのだろうか？　この辺のことは次節でもう少し詳しく考えることにする．

$(\mathcal{F}_M^*;\wedge)$ は非可換ではあるが，非可換性は $\omega^{(p)}\wedge\omega^{(q)}=(-1)^{pq}\omega^{(q)}\wedge\omega^{(p)}$ であるから，コントロールしやすいもので，**反交換子**なるものを $[a,b]_+=a\wedge b+b\wedge a$ で定義しておけば $[\mathcal{F}_M^{ev},\mathcal{F}_M^*]_\wedge=\{0\}$, $[\mathcal{F}_M^{od},\mathcal{F}_M^{od}]_+=\{0\}$ となるから，「偶奇性」(parity) に注目して扱うと可換環と同様に扱うことができる．その意味で，$(\mathcal{F}_M^*;\wedge)$ を **super 可換代数**と呼ぶことがある．これをあたかも可換関数環のごとく取り扱って数学を組み上げるのは，パリティの感覚が頭に入っていないとややこしいが，慣れてくるとかなり自由に動く．これは図形概念を頭に置いて，

それを取り込んで数学をつくることになるから図形的説明がしやすくなると考えるのはうなずける.

物理の中にあるボゾンとかフェルミオンという概念は上に述べたパリティの相違として理解することが多いから，こういうものが一緒に出てくる理論が自然界を記述する数学理論になるであろうと考えるのももっともなことである.

偶奇性の練習

後のほうで出てくるから，ここで偶奇性の練習を少しやっておこう．$\omega \in \mathcal{F}_M^*$ に対して $p(\omega)$ を $\omega \in \mathcal{F}_M^{ev}$ のとき 0，$\omega \in \mathcal{F}_M^{od}$ のとき 1 を対応させるものとする．$p(\omega)$ を ω のパリティと呼ぶ．$\mathcal{F}_M^*$ の元は一般には偶奇が入り混じった和で書かれているのだが，$\mathcal{F}_M^{ev}$ とか $\mathcal{F}_M^{od}$ の元はパリティがそろっているわけで，このような元を**純元**と呼ぶ.

要するに，$\mathcal{F}_M^*$ の元を考えるときに，いつも偶の部分と奇の部分に分けて考える習慣にするのである．この頭の使い方は，たとえば複素数を考えるときにいつも実部と虚部に分けて考えるというのと同じようなものだから，さほど難しいものではない．すると $\mathcal{F}_M^*$ の純元に対しては

$$\omega{\wedge}\omega' = (-1)^{p(\omega)p(\omega')}\omega'{\wedge}\omega, \qquad \text{（飛び越しの回数に注目）}$$
$$d(\omega{\wedge}\omega') = (d\omega){\wedge}\omega' + (-1)^{p(\omega)}\omega{\wedge}d\omega'$$

といった式が成立する．面倒に見えるが飛び越しが何回行なわれているかに注目していればよいのである.

この頭の使い方でいくと，たとえば双線形写像 $C : \mathcal{F}_M^* \times \mathcal{F}_M^* \to \mathbb{R}$ が super 対称，super 交代ということは，それぞれ

$$C(\omega,\omega') = (-1)^{p(\omega)p(\omega')}C(\omega',\omega), \quad C(\omega,\omega') = -(-1)^{p(\omega)p(\omega')}C(\omega',\omega)$$

と定義される．このように，飛び越しが何回行なわれているかだけに注目して $\pm$ を選んでいくと，これまで可換代数の上で定義されてきた幾何学的概念がすべてパリティをともなった概念に翻訳されてしまうのである．このような手続きを「super 化」ということがある.

ベクトル場との内部積

2.1 節で詳しく述べるが，C^∞-多様体 M の各局所座標近傍上で $X = \sum_i X^i(\boldsymbol{x})\partial_{x^i}$ の形（X^i は C^∞-関数）に書かれるものを，M 上の C^∞-ベクトル

場（(2.14) 式参照）という．

M 上の 1 次微分形式 $\omega=\sum_i \omega_i dx^i$ とベクトル場 $X=\sum_i X^i\partial_{x^i}$ との間には代入とか**内部積**と呼ばれる自然な積が定義される．これは $\langle\omega,X\rangle$, $\omega(X)$, $\omega\lrcorner X$, $\iota_X\omega$ などと書かれるが,

$$\iota_X\omega(=\omega\lrcorner X)=\sum_i \omega_i X^i\in C^\infty(M)$$

のことである．これを自然に拡張して M 上の 2 次微分形式 $\omega=\sum\omega_{ij}dx^i\wedge dx^j$（未整理）と X の内部積を

$$\iota_X\omega(=\omega\lrcorner X)=\sum_{i,j}(\omega_{ij}X^i dx^j-\omega_{ij}X^j dx^i)$$

と定義する．$\iota_X\omega$ は M 上の 1 次微分形式となる．さらに，M 上の p-次微分形式 $\omega=\sum\omega_{i_1\cdots i_p}dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$（未整理）とベクトル場 $X=\sum_i X^i\partial_{x^i}$ との内部積を次で定義する：

$$\iota_X\omega=\sum_{i_1,\cdots,i_p}\left(\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\omega_{i_1\cdots i_k\cdots i_p}X^{i_k}dx^{i_1}\wedge\cdots d\check{x}^{i_k}\cdots\wedge dx^{i_p}\right). \tag{1.9}$$

これは M 上の $(p-1)$-次微分形式となる（$d\check{x}$ はそこが抜けていることを表す）．

1.4 点の内部（無限小近傍）の構造

ここでいう無限小近傍の構造とは数学的には**局所環** (local ring) と呼ばれるものである．局所環とは逆元を持たない元の全体がイデアルになるもの（あるいは極大両側イデアルがただ 1 つしかないもの，言い換えれば古典的「点」がただ 1 つしかないもの）として数学では定義されるが，以下では典型的局所環であるグラスマン代数 $\Lambda^*(n)$ と，形式的冪級数環 $\Phi(n)$ で考える．

1.4.1 $\Lambda^*(n)$ の場合

全射準同型 $\phi:\mathcal{F}_M^*\to\Lambda^*(n)$ に対し，それが定める古典的点を p_ϕ とし，$\mathcal{F}_{p_\phi}^*=\{\omega\in\mathcal{F}_M^*;\omega(p_\phi)=0\}$ とすると，ϕ は自然に $\mathcal{F}_M^*/\mathcal{F}_{p_\phi}^*$ から $(\Lambda^*(n);\wedge)$ の上への同型 $\tilde{\phi}$ を引き起こす．$\tilde{\phi}$ を具体的に表示するには，まず $\mathcal{F}_M^*/\mathcal{F}_{p_\phi}^*$ を具体的に表示する必要がある．いろいろな $\tilde{\phi}$ を考えたいので，$p=p_\phi$ を原点とす

る局所座標系 $(x^1,\cdots,x^n)$ を勝手に（ϕ とは無関係に）選んで固定する．そうすると $\mathcal{F}_M^*/\mathcal{F}_{p_\phi}^*$ の元はすべて

$$\sum_{p=0}^n \sum a_{i_1\cdots i_p} dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}, \quad a_{i_1\cdots i_p}\in\mathbb{R}$$

のように表示されるから，このように表示された元全体を $\Lambda^*(p;d\boldsymbol{x})$ と書こう．すると，どんな $\tilde{\phi}$ でも自然に $(\Lambda^*(p;d\boldsymbol{x});\wedge)$ から $(\Lambda^*(n);\wedge)$ の上への同型写像となっているから，$p_\phi = p_{\phi'}$ であるような $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}'$ があると，$(\tilde{\phi})^{-1}\tilde{\phi}'$ は $(\Lambda^*(p;d\boldsymbol{x});\wedge)$ から自分自身への同型写像となる．このようなものを**自己同型写像** (automorphism) と呼ぶ．

自己同型写像の全体は写像の合成を「積」と考えてやると群になる．これを**自己同型群** (automorphism group) と呼ぶ．すると，古典的「点」p は実は内部構造を持っており，それが全体としてはグラスマン代数 $(\Lambda^*(p;d\boldsymbol{x});\wedge)$ の自己同型群をなしていると考えられる．

内部構造 (1)

古典的「点」p の内部構造とはグラスマン代数 $(\Lambda^*(p;d\boldsymbol{x});\wedge)$ の自己同型群のことである．これを $\mathrm{Aut}(\Lambda^*(p;d\boldsymbol{x});\wedge)$ と書く．

となると，ここから意味のある数値（観測値）を取り出すにはどうすべきかということが問題となるが，$\mathrm{Aut}(\Lambda^*(p;d\boldsymbol{x});\wedge)$ の元は $\Lambda^*(p;d\boldsymbol{x})$ から自身への線形写像には違いないから $\Lambda^*(p;d\boldsymbol{x})$ の線形基底をずらりと並べれば $2^n\times 2^n$ 行列で表示できる．しかしこの行列成分（数には違いないが）に意味があるだろうか？　行列成分は自由に選んで固定した局所座標系 $(x^1,\cdots,x^n)$ を変えれば変わってしまう量である．このような数値が伝達可能な意味を持ち得るであろうか？

図形的意味のある量は座標系の取り方に無関係なものであるべきだろう．座標系による表示は無意味な情報を含みすぎている．

線形代数での説明

このことを少し話を簡略にして述べよう．V を m-次元抽象線形空間とする．これは加法とスカラー倍がしかるべく定義されているだけの集合だから，V の

元を書くといっても $\boldsymbol{v} \in V$ のように書くだけである．V の線形基底を与えてはじめて $\boldsymbol{v}$ は数の組として表示される．つまり，基底を $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ とすると $\boldsymbol{v} = \sum v_i \boldsymbol{e}_i$ のように表示される．

$L: V \to V$ を線形写像とする．前節では L は線形同型だったが，ここではそうでない場合も一緒に考える．これも V だけしか与えられていなければたんに線形という性質を書くだけしかやりようがないものである．線形基底を与えてはじめて L は

$$(L(\boldsymbol{e}_1), \cdots, L(\boldsymbol{e}_m)) = (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m) M_L \tag{1.10}$$

のように $m \times m$ 行列 $M_L = (m_{ij})$ で表示される．これを L の（線形基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ に関する）**行列表示**と呼ぶ．

m_{ij} は確かに数値だが V の線形基底を替えれば変わってしまうものである．L の性質を表現しているような意味のある数値を得るにはどうしたらよいか考えよう．これには基底の変更で変わらないものをつかみだせればよい．

記号を簡単にして $(L(\boldsymbol{e}_1), \cdots, L(\boldsymbol{e}_m))$ を $L(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m)$ と書くことにする．さらに $GL(m)$ を $m \times m$ 正則行列全体とする．これは行列の積に関して群になっている．これを**一般線形群**と呼ぶ．

基底の変更は $T \in GL(m)$ を使って $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m) = (\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_m) T$ と書かれるから，これを (1.10) 式に代入すると $(\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_m)$ による L の表示は

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_m) &= L((\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m) T^{-1}) = (L(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m)) T^{-1} \\ &= (\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_m) M_L T^{-1} = (\boldsymbol{e}'_1, \cdots, \boldsymbol{e}'_m) T M_L T^{-1} \end{aligned}$$

でわかるように M_L から $T M_L T^{-1}$ へと変化する．$T \in GL(m)$ は任意だから，われわれが求めるものは $M_L \to T M_L T^{-1}$ の変換で変わらないものだということになる．

> L の固有値，重複度，ジョルダン (Jordan) 標準形などは L に固有のもので，行列表示によらないものである．これが，行列の空間に上のように作用している群 $GL(m)$ に属するクライン幾何の内容である．量子論で固有値が重要視される理由がここにある．

Aut$(\Lambda^*(p; d\boldsymbol{x}); \wedge)$

$\mathrm{Aut}(\Lambda^*(p; d\boldsymbol{x}); \wedge)$ を少し調べておく必要があるわけだが，後の話のために $\mathbb{R}^n$ の原点の開近傍 U で話をするが，上の話につなぐにはこれを原点のところだけで考えればよい．

記号の説明から始めよう．n 変数の多項式を書くのにどうするか？　1 変数だったら $\sum_{k=0}^m a_k x^k$，2 変数だったら $\sum_{k,l} a_{k,l} x^k y^l$ のように書くのだから，

$$p(x_1, \cdots, x_n) = \sum_{i_1, \cdots, i_n} a_{i_1, \cdots, i_n} x_1^{i_1} \cdots x_n^{i_n}$$

と書けばよいだろう．しかしこれではスペースをとりすぎるので，以下のような**多重添字法**と呼ばれる書き方を使う：記号を

$$\begin{array}{lll} \alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n), & |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n, & \alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n! \\ \boldsymbol{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}, & a_\alpha = a_{\alpha_1, \cdots, \alpha_n}, & \partial^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} \end{array}$$

とし，これを用いて m 次多項式は $p(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\alpha| \le m} a_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha$ のように表す．見かけは 1 変数の多項式だが添字 α が多重になっている．この書き方は 1, 2 次式を書くときには不便だが，次数の高いところを書くときには便利である．k 階の微分作用素は $\sum_{|\alpha| \le k} a_\alpha(\boldsymbol{x}) \partial_x^\alpha$ と書けばよいし，多変数のテイラー (Taylor) 展開は

$$f(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{h}) = \sum_{|\alpha| \ge 0} \frac{1}{\alpha!} (\partial_x^\alpha f)(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{h}^\alpha$$

のように書かれる．

2 次以上偶数次の微分形式 $\xi^1, \cdots, \xi^n$ を任意に固定し，$\boldsymbol{\xi} = (\xi^1, \cdots, \xi^n)$ とする．$\forall f(\boldsymbol{x}) \in C^\infty(U)$ に対して

$$f^\sharp(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{\xi}) = \sum_{|\alpha| \ge 0} \frac{1}{\alpha!} (\partial_x^\alpha f)(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{\xi}^\alpha \tag{1.11}$$

と定義する．右辺の和は有限で切れるから収束の問題はない．これをデ・ウィット (de Witt[8]) に習って f の**グラスマン連接** (Grassmann continuation) と呼ぶ[10)]．

---

10)　微分形式を座標変換に対する変換性（テンソル）で理解しているとこのような置き換えは奇妙に見えてしまうだろう．

補題 1.5　$\forall f, g \in C^\infty(U)$ に対して

$$(fg)^\sharp(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}) = f^\sharp(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\wedge g^\sharp(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})$$

であり，$f \to f^\sharp$ は $C^\infty(U)$ から外微分環 $\mathcal{F}_U^*$ への単射準同型となる．

$\forall\omega \in \mathcal{F}_U^*$ に対して，$\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi}$, $dx^i \to dx^i$ という置き換え（“引き戻し”）を行なう写像を $\Phi(\omega)$ と定義する．たとえば

$$\Phi(f(\boldsymbol{x})dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}) = f^\sharp(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\xi})\wedge dx^{i_1}\wedge\cdots\wedge dx^{i_p}$$

である．$\Phi : \mathcal{F}_U^* \to \mathcal{F}_U^*$ が自己同型になることは容易にわかる（慣れていない人は後述 1.4.2 項の逐次代入法を参照）．

一般には $\Phi(d\omega) \neq d\Phi(\omega)$ だが，$d\xi^i = 0\ (1 \le i \le n)$ の場合には $\Phi(d\omega) = d\Phi(\omega)$ が成立する．

$\mathcal{F}_M^*$ の自己同型 $\varphi : \mathcal{F}_M^* \to \mathcal{F}_M^*$ は根基 $\mathcal{F}_M^+$ を不変にしており，

$$C^\infty(M) = \mathcal{F}_M^{(0)} \cong \mathcal{F}_M^*/\mathcal{F}_M^+ \quad (\mathcal{F}_M^+ \text{ 部分を 0 扱いにする記号，商空間という})$$

であるから φ は $C^\infty(M)$ の自己同型 $\tilde{\varphi}$ を誘導する．しかし，$\varphi(\mathcal{F}_M^{(0)}) = \mathcal{F}_M^{(0)}$ であるとは限らない．

一方，任意の $C^\infty(M)$ の自己同型 $\tilde{\varphi}$ は C^∞-同相写像 $\phi : M \to M$ を使って $\tilde{\varphi} = \phi^*$ という形で与えられる．つまり $\tilde{\varphi}(f)(p) = (\phi^* f)(p) = f(\phi(p))$ と書かれる．さらに ϕ による引き戻し写像 ϕ^* として，ϕ^* は $\mathcal{F}_M^*$ の自己同型を与える．

$(\phi^*)^{-1}\tilde{\varphi} : \mathcal{F}_M^* \to \mathcal{F}_M^*$ は自己同型で $\mathcal{F}_M^*/\mathcal{F}_M^+ \cong \mathcal{F}_M^{(0)}$ には恒等変換を引き起こす．しかし，$(\phi^*)^{-1}\tilde{\varphi}$ は恒等写像とは限らない．

super

多様体は結局局所座標系のパッチワークだったから，“座標変換”として

$$x_\alpha^i + \xi_\alpha^i = \varphi_{\alpha\beta}^i(\boldsymbol{x}_\beta), \quad dx_\alpha^i = \psi_{\alpha\beta}^i(dx_\beta^1, \cdots, dx_\beta^n), \quad 1 \le i \le n$$

のようなものを考えてこれで局所座標系のパッチワークを考えてみたらどうなるだろう（ξ_i は $d\xi_i \neq 0$ でもよい）．
このようにしても多様体論はほとんど困らないのである．この考え方で定義する多様体を（大げさな名前で感心しないが）**超多様体** (super manifold) と呼ぶ．第 10 章で実際このような変換をしないといけない例が登場する．

定義のしかたが過激だから,「点」という概念をぶち壊しているように思えるのだが,これはよく見ると何かの上部構造つきの古典的多様体で説明がついてしまうような対象物である.

1.4.2 形式的冪級数環

形式的冪級数とは ∞ 次の多項式を形式的に書いたようなもので多重添字法を用いて

$$f(\boldsymbol{x}) = \textstyle\sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha$$

と書かれる.この冪級数が収束するとか収束半径があるとかそういうことをいっさい考えないで,ただ式を書いただけのものである.$\boldsymbol{x}$ に 0 以外の数を代入したりしないものである.係数は実数,$a_\alpha \in \mathbb{R}$ とする.n-変数の形式的冪級数の全体を $\Phi(n)$ と書くことにする.$\Phi(n)$ は $\Lambda^*(n)$ と違って無限次元である.

$\forall c \in \mathbb{R}, \forall f(\boldsymbol{x}), \forall g(\boldsymbol{x}) \in \Phi(n)$ に対して

$$cf(\boldsymbol{x}), \quad (f+g)(\boldsymbol{x}), \quad fg(\boldsymbol{x})$$

などが $\Phi(n)$ の元として自然に定義され,可換環になる.積を計算するときは多項式のときと違って次数の低いほうから次数に注目して計算する.

さらに次のことがわかる.

補題 1.6 $\Phi(n)$ の元 $f = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha$ は定数項 a_0 が 0 でなければ,逆元 $1/f$ が $\Phi(n)$ の元としてつくられる.

証明 $1/f = \sum_{|\beta|\geq 0} b_\beta \boldsymbol{x}^\beta$ と書いて具体的に式を書いてみると $f(1/f) = 1$ となるように b_β を次数の低いところから順次決めていけることがわかる.このようなずるがしこい計算法を,**未定係数法**と呼ぶ. (証明終わり)

定数項 a_0 が 0 であるような形式的冪級数の全体を $\Phi_0(n)$ とする.同様に k 次までの係数 $a_\alpha, |\alpha| \leq k$ がすべて 0 となるような形式的冪級数の全体を $\Phi_k(n)$ とする.$\Phi_k(n)$ はイデアルであるが,補題 1.6 より $\Phi(n)$ の極大イデアルは $\Phi_0(n)$ のみであることがわかる.また,商空間 $\Phi(n)/\Phi_k(n)$ は k-次多項式の空間であるから,自然に位相が入っている線形空間である.

$\pi_k : \Phi(n) \to \Phi(n)/\Phi_k(n)$ を(k 次までの項を取り出す)自然な射影とする.これは全射準同型である.

$\Phi(n)$ の中ではどんな計算でもできるのである．できないのは変数のところに 0 以外の数を代入して値を取り出すことだけである．形式的冪級数環といえどもたくさんの情報を持っているのである．

補題 1.7　形式的冪級数環 $\Phi(n)$ では $f, g \in \Phi(n)$ について $fg = 0$ なら f, g のどちらか一方が 0 である（このことは「$\Phi(n)$ には零因子は存在しない」という述べ方になる）．

証明　$f = \sum_{|\alpha| \geq 0} a_\alpha x^\alpha$, $g = \sum_{|\beta| \geq 0} b_\beta x^\beta$ とし，$f \neq 0$, $fg = 0$ から $g = 0$ が導けることを見れば十分．これは冪級数 g で，0 でない最低次数の項があるものとすると，$fg = 0$ の条件と矛盾することから出る．（証明終わり）

さらに次のことが知られている（証明は案外難しい）．

補題 1.8　$\forall f \in \Phi(n)$ に対して $\mathbb{R}^n$ の原点の近傍で定義された C^∞-関数 $\mathfrak{f}$ で，それの原点でのテイラー展開 $T^{(\infty)}\mathfrak{f}$ が f となるものがある（むろん一意的でないし，$\mathfrak{f}$ が f に線形に依存するようにはつくれない）．

そこで，$\mathcal{O} = C^\infty(M)$ とし，$\Lambda^*(n)$ の場合と同様に点を定義したいのだが，後で $\mathcal{O}$ の元がすべて実解析的な関数になっている場合にも使えるように，次のように定義する．

点概念の変更

点とは $\mathcal{O}$ から $\Phi(n)$ への準同型写像 ϕ で，任意の自然数 k に対して $\pi_k\phi$ が $\mathcal{O}$ から $\Phi(n)/\Phi_k(n)$ への連続な全射準同型になるもののことである．

さらに $\Phi(n)$ は $\boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n)$ の形式的冪級数全体とする．$\phi : \mathcal{O} \to \Phi(n)$ を上の意味の「点」とすると $\pi_0\phi : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ は連続全射準同型だから古典的点 $p_\phi \in M$ が定まって，$\phi^{-1}\Phi_0(n) = \{\mathfrak{f} \in \mathcal{O}; \mathfrak{f}(p_\phi) = 0\}$ となる．そこで p_ϕ を原点とする局所座標系 $(X^1, \cdots, X^n)$ を $\phi(X^i) = x^i$, $1 \leq i \leq n$ となるように選んで固定する．そして記号を節約して，X^i のほうも x^i と書いてしまうことにする．こうすると写像 ϕ は M 上の関数を局所座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ に関してテイラー展開し，テイラー級数を対応させるものに他ならないことがすぐにわかるだろう．

$\mathcal{O}_{p,k} = \phi^{-1}\Phi_k(n)$ は $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}$ で，点 p で k 階までの微分が消える（0 となる）ものの全体である．そこで，$\mathcal{O}_{p,\infty}$ を $\mathfrak{f} \in \mathcal{O}$ で点 p ではすべての微分が消える

もの（こういう関数を p で平坦 (flat) な関数という）の全体とする．

$\mathcal{O} = C^\infty(M)$ の場合には $\mathcal{O}_{p,\infty} \neq \{0\}$ であるが，$\mathcal{O}$ の元がすべて実解析的な関数になっているような場合には $\mathcal{O}_{p,\infty} = \{0\}$ である．

ϕ は $\forall k$ に対し自然に連続な同型写像 $\tilde{\phi}_k : \mathcal{O}/\mathcal{O}_{p,k} \to \Phi(n)/\Phi_k(n)$ を引き起こしている．

$$\mathcal{O}_{p,0} \supset \mathcal{O}_{p,1} \supset \cdots \supset \mathcal{O}_{p,k} \supset \mathcal{O}_{p,k+1} \supset \cdots$$

は明らかにイデアルの減少列だから，商空間のほうには

$$\mathcal{O}/\mathcal{O}_{p,0} \leftarrow \mathcal{O}/\mathcal{O}_{p,1} \leftarrow \cdots \leftarrow \mathcal{O}/\mathcal{O}_{p,k} \leftarrow \cdots$$

のような全射準同型の列が得られる．

ここから，射影極限 $\mathcal{O}/\mathcal{O}_{p,\infty} = \varprojlim \mathcal{O}/\mathcal{O}_{p,k}$ を考えるのが本筋だが，これはもう少し先に譲って，以下では $\mathcal{O} = C^\infty(M)$ の場合で話をする．$p = p_\phi \in M$ が決まったとき，ϕ がどの程度決まるか考える．そのために p を原点とする局所座標系 $(x^1, \cdots, x^n)$ を（ϕ とは無関係に）勝手に選んで固定する．

$\mathfrak{f}$ をこの座標形で表示して考えるが，とくにこの表示で $\mathfrak{f}$ の原点でのテイラー展開を $T^{(\infty)}\mathfrak{f}$ とし，その全体を $\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x})$ とする．すると，どんな $\tilde{\phi}$ でも（$p = p_\phi$ ならば）自然に $\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x})$ から $\Phi(n)$ の上への同型写像となっていることがわかるから，$p_\phi = p_{\phi'}$ であるような $\tilde{\phi}, \tilde{\phi}'$ があると，$(\tilde{\phi})^{-1}\tilde{\phi}'$ は $\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x})$ から自分自身への同型写像となる．

内部構造 (2)

古典的「点」p の内部構造とは形式的冪級数環 $\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x})$ の自己同型群のことである．これを $\mathrm{Aut}(\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x}))$ と書く．

$\mathrm{Aut}(\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x}))$ がどのようなものか調べるためには形式的冪級数の計算を少し練習する必要がある．基本は次に述べる代入の計算である：

代入計算（引き戻し）：$f = \sum_{|\alpha|\geq 0} a_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha$ が与えられたとして，これの x_i のところを y_i に書き換えて

$$y_i = \sum_{|\beta|\geq 1} b^i_\alpha \boldsymbol{x}^\beta, \quad 1 \leq i \leq n \tag{1.12}$$

を**代入**していくことを考える．(1.12) 式は定数項がなく 1 次の項から始まっていることが大切で，少し注意深く書いてみれば，次数の低いところから順に決まってゆき，結局形式的冪級数ができあがることが確認できるであろう．

これより，(1.12) 式を代入することは $\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x})$ から $\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x})$ 自身への準同型写像になっていることがわかる．このような計算は (1.12) のような式をもう 1 つ書いておいてそれらを**合成**することもできるであろう．

逐次代入法：代入の合成ができるのだから $\mathrm{Aut}(\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x}))$ の元を見つけるには (1.12) 式でこれが x_i について逆に解けるようなものを探せばよい．

補題 1.9 (1.12) 式の 1 次項を $\sum_j b^i_j x_j$ としたとき行列 (b^i_j) に逆行列があれば，(1.12) 式は x_i について逆に解けて，x_i を $y_1, \cdots, y_n$ の形式的冪級数として表せる．

証明 (1.12) 式を移項して $\sum_j b^i_j x_j = y_i - \sum_{|\beta|\geq 2} b^i_\alpha \boldsymbol{x}^\beta$，$1 \leq i \leq n$ のように書き，両辺に (b^i_j) の逆行列をかけると

$$x_i = \sum\nolimits_j c^i_j y_j - \sum\nolimits_{|\beta|\geq 2} c^i_\alpha \boldsymbol{x}^\beta, \quad 1 \leq i \leq n \tag{1.13}$$

のような姿にまでできることはすぐわかるであろう．

ここからが逐次代入法という妙な名前の付くやりかたで，(1.13) 式を**自分自身の式に次々に代入**するのである．代入するごとに次数の低いほうから $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{y}$ に置き換わっていってついには $\boldsymbol{y}$ だけの式に置き換わるのである．

$$x_i = \sum\nolimits_j c^i_j y_j - \sum\nolimits_{|\beta|\geq 2} c^i_\alpha \boldsymbol{x}^\beta$$

↑ ここに代入する．簡単な式で実験してみるとわかる．

$$x_i = \sum\nolimits_j c^i_j y_j - \sum\nolimits_{|\beta|\geq 2} c^i_\alpha \boldsymbol{x}^\beta$$

（証明終わり）

ここから先の考え方は $\mathrm{Aut}(\Lambda^*(p;d\boldsymbol{x});\wedge)$ の場合と同じだが，どちらの場合も具体的にどうすれば座標系表示によらないものが見えるのかまだ述べられていない．次にそれを考えよう．

1.4.3 内部構造として見得るものは何か？

「見得るもの」と書いたが，これは「観測し得るもの」と言い換えてもよいものであろう．意味のはっきりしているものしか観測の対象にならないだろうし，またそうでなければ，「追試」など行なえないであろう．前に「線形代数での説明」の項で述べたように，局所座標表示は情報を含みすぎているから，ここから局所座標表示のしかたによらないで意味のあるものを取り出さなければならない．まず，同値（同じ）と考えるものを定義しよう．

定義 1.3　$\mathrm{Aut}(\Phi^\infty(p;\boldsymbol{x}))$ の元 f, g が**同値**であるとは $\varphi \in \mathrm{Aut}(\Phi^\infty(p;\boldsymbol{x}))$ があって，$\varphi f \varphi^{-1} = g$ となる場合をいう．この場合 f と g は**同じ共役類に属する**という．

$\mathcal{F}_M^*$ の場合もそうであるが，「見得るもの」は各共役類に貼られたラベル，共役類を代表する数値，共役類の中の標準形などである．線形作用素の場合には共役類を代表する数値は固有値でほとんど話がすんでしまうことが多いが，固有値に重複があると特異点の分類に関係するデリケートなものを見ないといけなくなることが多い．ここから先は数学独特の話になってしまうし，話題も特殊なものに限定されてしまうので，この位で止めておくことにする．

数学的表示は演算を可能にするために無意味な情報を含みすぎるきらいがある．だから，言語として数学を使うにはそこから意味のある，言語として使える部分を引き出す技術が求められるのである．文系の人は面倒臭がるが，これが数学の宿命である．

第 2 章　古典的運動

たとえば $0.a_1a_2a_3\cdots$ のように 10 進無限小数で書かれている数字のどこをどのようにコントロールすると点が滑らかに動いていることを表現できるだろうか？　実数直線というと，いかにも何かが一列に並んでいるようだが，これはカスケード（分かれ瀧，あるいは無限 2 分法）の構造だから，次々に何かを動かして実数直線上を進むというような表現で運動を記述するのは不可能である．だから，ギリシャの時代には論理的に運動を考えることはできないとされていた．

（パラドックス）矢は永久に進めない．

このようなパラドックスが起こる訳は数学史に譲るが，要点は「0 はいくつ足そうと 0 であろう」（アルキメデス (Archimedes) の公理とほとんど等価）という論理からきている．これを破るには「0 は非可算無限個足せば 0 でなくなることもある」という連続体の論理を持ってこなければならないのである．

物の動きを論理的に考えるには「連続体」という非可算無限を基礎にしたカスケード構造が絶対に必要であったわけで，ギリシャの時代のパラドックスは微積分学をつくったことによって解消されたとされているが，微積分学は必然的に非可算無限（連続体）の論理を含んでいるのである．

人間は連続体内の運動を直接コントロールすることはできず，いつでも自然界のルールとしてそれをコントロールしていると思われるものを**間接的**に操作

してそれによって操作することしかできないのである．これが運動に対する人間の側の限界であるし，同時に観測ということに対する限界なのである．

確かに教育技術は進歩したのだが，これはギリシャ人達の素朴な疑問，そして今日の素朴な高校生の疑問に答えているのだろうか？ **ギリシャの俊哲達が解けなかった謎が今日の高校生にはあたりまえであるなどということが起こり得ようか？** （この部分にはっきりした考えを持たずに科学技術振興などと安易に言っている人達の見識とはどんなものだろう？）

2.1 運動の古典的概念

多様体をあからさまに持ち出さなくても，可換代数としての $\mathcal{O}$ さえあれば運動をはじめいろいろなものが定義できるから，この節でそれをまとめておこう．

2.1.1 古典的「点」の運動，$f \in \mathcal{O}$ の運動

まず「物の動き」（運動）はどのように記述されてきたかを述べよう．運動に対する考え方は大きく分けて 2 つある．1 つは「点」が動くと考えるもの，もう 1 つは「可能観測量」$f \in \mathcal{O}$ が動くと考えるものである．

1 を含む可換代数 $\mathcal{O}$ が与えられているとし，M を $\mathcal{O}$ から $\mathbb{R}$ への全射準同型の全体とする．M **が多様体であるかどうかはこの節では問題にしないが**，この節で述べる定義は M が有限次元 C^∞-多様体で $\mathcal{O} = C^\infty(M)$ の場合は，すべて標準的教科書の定義と同じものである．

「点」の運動

最初に点の運動なるものを考えよう．これには「時間」[1] t を径数 (parameter) として $p_t : \mathcal{O} \to \mathbb{R}$ を考える．動きを表現するために微分 $\frac{d}{dt}\big|_{t=0} p_t(f)$ を考えると，$p_t(fg) = p_t(f)p_t(g)$ であったから，積の微分ルールより

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p_t(fg) = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p_t(f)p_0(g) + p_0(f)\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p_t(g)$$

となる．$\frac{d}{dt}\big|_{t=0} p_t$ を線形写像

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p_t : \mathcal{O} \to \mathbb{R}, \quad f \to \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} p_t(f)$$

1) 数学でも「時間」という言葉は使うが，物理的意味はない．ただのパラメーターとして理解してほしい．

と考えて，これを**曲線** p_t **の**（p_0 **における**）**接ベクトル**と呼ぶ．

曲線とは無関係に，線形写像 $X:\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ で

$$X(fg)=(Xf)g+f(Xg),\quad \forall f,\forall g\in\mathcal{O}$$

を満たすものを $\mathcal{O}$ の**微分** (derivation)，または**接ベクトル場**と呼ぶ．

$\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ を接ベクトル場の全体とする．一般には次のように定義しておく．

定義 2.1 多重線形写像 $T:\mathcal{O}\times\cdots\times\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ が $T(f_1,\cdots,f_m)$ の各 f_k について微分の性質を持つとき m**-重微分**という．m-重微分の全体を $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}^{(m)}$ と書く．$\mathcal{X}_{\mathcal{O}}=\mathcal{X}_{\mathcal{O}}^{(1)}$ である．

$X,Y\in\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ のとき，**リー括弧積**と呼ばれる 2 項演算 $[X,Y]$ を

$$[X,Y](f)=X(Y(f))-Y(X(f)),\quad f\in\mathcal{O}\tag{2.1}$$

と定義すると，これも微分である．つまり $[X,Y]\in\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ である．

一般に線形空間 $\mathfrak{g}$ の $\forall X,\forall Y$ に対し $[X,Y]$ という $\mathfrak{g}$ の元が対応し，それが左の 3 つの性質を持つとき**リー代数**という．3 番目の等式は**ヤコビ恒等式**と呼ばれるが，定義の条件として入っているもので，恒等的に成立しているという意味ではない．(3) は巡回和を使って $\sum_{(X,Y,Z)}[X,[Y,Z]]=0$ と書いてもよい．

(1) X,Y について双線形
(2) $[X,Y]=-[Y,X]$（歪対称）
(3) $[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0$

$(fX)(g)=f(X(g))$ と定義しておけば，次のことは容易であろう．

補題 2.1 $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ はリー括弧積でリー代数をなし，$\forall X\in\mathcal{X}_{\mathcal{O}},\forall f\in\mathcal{O}$ に対して $fX\in\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ である（これを $\mathcal{O}\mathcal{X}_{\mathcal{O}}=\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ のように書く）．

$\forall X,\forall Y\in\mathcal{X}_{\mathcal{O}},\forall f\in\mathcal{O}$ に対し次式が成立することは明らかであろう：

$$[fX,Y]=f[X,Y]-(Yf)X.\tag{2.2}$$

$p\in M$ に対し $\mathcal{O}_p=\{f\in\mathcal{O};f(p)=0\}$ とし，$\mathcal{O}_p\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ を $f\in\mathcal{O}_p$, $X\in\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ の積 fX の線形結合の全体とする．

線形空間としての商空間 $T_pM = \mathcal{X}_{\mathcal{O}}/\mathcal{O}_p\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ を p における**接ベクトル空間**と呼び，T_pM の元を M の p における**接ベクトル**と呼ぶ．$\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ から T_pM への自然な射影を $\pi_p : \mathcal{X}_{\mathcal{O}} \to T_pM$ とする．

微分 $X : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ が与えられたとき，点 $p \in M$ において $X_p(f) = X(f)(p)$ とすれば，X_p は $\mathcal{O}$ から $\mathbb{R}$ への線形写像で，$\forall f, g \in \mathcal{O}$ に対して $X_p(fg) = (X_pf)g(p) + f(p)(X_pg)$ を満たす[2)]．これを X の p **での値**と呼ぶ．

$$(X + \mathcal{O}_p\mathcal{X}_{\mathcal{O}})(f)(p) = X(f)(p) = X_p(f)$$

だから $\pi_p(X) = X_p$ である．その意味で X_p を $X(p)$ とも書く．

先に定義した $\frac{d}{dt}\big|_{t=0}p_t$ が何かある $X \in \mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ の p_0 への制限であるとは一般には結論できないから，上の定義の意味での接ベクトルの概念と曲線 p_t の接ベクトルのそれとが一致するとは限らない[3)]．

接ベクトル場 $X : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ が与えられているとき，点の運動 p_t で

$$\frac{d}{dt}p_t = \frac{d}{d\delta}\Big|_{\delta=0}p_{t+\delta} = X(p_t) \tag{2.3}$$

となるものを接ベクトル場 X の**積分曲線**と呼ぶ．

積分曲線の定義はできたが，存在の証明は別問題である．

質点の運動の見方

運動の法則は接ベクトル場 X で与えられ，個々の運動は積分曲線として与えられる．ここでは，「点が自転しながら運動する」などという表現は意味がないのだが，こういうものも考えたくなるであろう．

$f \in \mathcal{O}$ の動きとしての運動

一方 $f \in \mathcal{O}$ が時刻とともに動くのが運動であるという考え方がある．確かに観測を主体に考えると動いているのはたとえばある地点での「温度」であり，「気圧」である．この考え方の特徴は「水の流れを橋の上から流速の変化として観測」しているような見方だということで，**原理的には無数の観測点を設けて「定点観測」を行なっている**と考えている．

2) 普通の教科書では $X_p(fg) = (X_pf)g(p) + f(p)(X_pg)$ という性質を持つものを p における M の接ベクトルと定義してあるが，C^∞-多様体上では上の定義と同じになる．

3) M が有限次元多様体のときには一致する．

運動に対するこの 2 つの見方は感覚的にはかなり違って見えるのだが，実はあまり違ったものではない．この考え方はすでに点の動きを表示するときにも暗に使っているのである．「点が動く」というイメージで考えるといってもそれを数式として記述するには，結局点の位置を表す座標関数 $f = x^i$ の変化を記述するしか方法がないからである．

点の位置の記述

点の動きとして運動を記述するというとイメージは湧きやすいだろうが，それを数式として記述すると，点の位置を座標という数値で表さなければならないから，座標関数という $\mathcal{O}$ の元の動きを見ることになるわけである．

自己同型群

f が動くという立場をもっと徹底して運動を記述してみよう．$\mathcal{O}$ の自己同型の全体を 1.1.3 項に合わせて $G_{\mathcal{O}}$ と書く．$G_{\mathcal{O}}$ は写像の合成で積が定義されて群をなす．$\varphi_t : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ という径数 $t \in \mathbb{R}$ に依存する自己同型が $\forall s, t \in \mathbb{R}$ に対して

$$\varphi_s \varphi_t = \varphi_{s+t}, \quad \varphi_0 = e \text{ (恒等写像)}$$

という性質を持つとき **1 径数部分群** (one parameter subgroup) と呼ぶ．$\forall p \in M$ に対し，微分

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p \circ \varphi_t(f) = \lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta}\big(p \circ \varphi_\delta(f) - p \circ \varphi_0(f)\big) = \lim_{\delta \to 0} p \circ \left(\frac{1}{\delta}(\varphi_\delta(f) - \varphi_0(f))\right)$$

が存在するものとしてこれを $Xf(p)$ と書いてみると積の微分ルールで

$$X(fg) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \varphi_t(f)\varphi_t(g) = (Xf)g + f(Xg) \tag{2.4}$$

となる．X を φ_t の**無限小生成元**というが，一般に $Xf \in \mathcal{O}$ とは限らない．$X(\mathcal{O}) \subset \mathcal{O}$ となっている場合は X は接ベクトル場である．

$f_t = \varphi_t(f)$ は微分方程式 $\frac{d}{dt} f_t = X f_t$ を満たすことが次のようにして容易にわかる：

$$\frac{d}{dt} f_t = \left.\frac{d}{d\delta}\right|_{\delta=0} \varphi_\delta \varphi_t(f) = X\varphi_t(f) = X f_t. \tag{2.5}$$

いま，接ベクトル場 $X : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ が与えられているとする．$p \in M$ をいっせいに考えているものとし，それが時間とともにいっせいに X の積分曲線として

p_t のように動くものとし，$p_t = \varphi_t(p), p = \varphi_0(p)$ と書くことにする．$f \in \mathcal{O}$ は $p \in M$ をいっせいに考えているので $\{f(p); p \in M\}$ のことだと思ってよい．

運動のオイラー (Euler) 的見方

> 運動の法則は接ベクトル場 $X : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ として与えられる．個々の運動は微分方程式 $\frac{d}{dt}f_t = Xf_t$ を解いて得られる．

運動の定義はできたが，存在の証明は別問題である．「法則」は書けても，その法則に従う個々のものが書けない理論は結局「空論」と呼ばれることを頭に入れておこう．

積分曲線による見方が（質点とでも呼ぶべき）点の概念をあからさまに使っているのに対して，上のオイラー的見方は $\mathcal{O}$ の中で話が閉じている．

微分には (2.4) 式のところで述べたように**無限小の自己同型**という意味があったのだが，しかしすべての接ベクトル場が 1 径数部分群の微分で与えられると思うのは早計である．このような接ベクトル場は**完備**接ベクトル場と呼ばれる．

> C^∞-多様体 M で $\mathcal{O} = C^\infty(M)$ のとき接ベクトル場がすべて完備接ベクトル場になっているような多様体というのは閉じた多様体（=境界のないコンパクト多様体）に限られる．

次の例で見られるように，一般には完備な接ベクトル場全体は線形空間にもなっていないし，括弧積で閉じもしないので取り扱いがきわめて難しいものである．

【例 2.1】（病理的実例） $\mathbb{R}^2$ 上のベクトル場 $X(x,y) = x^2\partial_y, Y(x,y) = y^2\partial_x$ を考える．これらはそれぞれ

$$\varphi_t(x,y) = (x, y+tx^2), \quad \psi_t(x,y) = (x+ty^2, y)$$

という 1 径数部分群を生成する完備なベクトル場である．しかし，$X+Y$ は完備ではない．このベクトル場は直線 $y = x$ に接しているが，そこでは $X+Y = \tau^2\partial_\tau$ である．右辺のように書かれる $\mathbb{R}$ 上のベクトル場が完備でないのは，微分方程式 $\frac{d}{dt}\tau(t) = (\tau(t))^2$ の解は $\tau(t) = \frac{1}{c-t}$ であることからわかる．

一方 $\sin x\partial_y$ と Y とのリー括弧積は

$$[Y, \sin x\partial_y] = y^2\cos x\partial_y - 2y\sin x\partial_x$$

であるが，これも完備でない．というのはこれは y-軸に沿っては $y^2\partial_y$ というベクトル場になるからである．

しかし，有限次元多様体 M 上の接ベクトル場 X で台 $\mathrm{supp}X$ がコンパクト，つまりあるコンパクトな部分集合の外側で恒等的に 0 となっていると，X は完備である．だから，$\forall f \in C^\infty(M)$ に対して fX も接ベクトル場となることを利用して，X の代わりに fX で話をすることもできる．

2.1.2　リー微分

完備ベクトル場全体というのは取り扱いにくいのだが，無限小の自己同型という感覚を基礎にした**リー微分**と呼ばれる微分法がある．$G_{\mathcal{O}}$, $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ はこれまでどおりとする．$X \in \mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ を完備なベクトル場とし，$\psi(X)_t : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ を X で生成される 1 径数自己同型群とする．

位相についてはあまり述べてこなかったが常識的に考えることにして，V を位相線形空間とする．すでに使っている言葉だが，開区間 I から V への連続写像 $f : I \to V$ が I 上で C^1 級であるとは，各 $a \in I$ で

$$f'(a) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f(a+t) - f(a))$$

が V の元として定義され，さらに $f' : I \to V$ が I 上で連続となる場合をいう．あとは，言葉の綾みたいな定義で帰納法的に **f' が C^{k-1} 級のとき f を C^k 級と呼ぶ**と定義する．さらに $\forall k$ について C^k 級のとき C^∞ 級と呼ぶ．V が後で述べる σ-フレシェ（Fréchet）空間ぐらいの位相空間であれば上のような定義で常識的な性質はほとんど普通の関数と変わらない．

写像 $\rho : G_{\mathcal{O}} \times V \to V$ が群 $G_{\mathcal{O}}$ の V への**可微分な作用**であるとは任意の完備ベクトル場 X に対して，ρ が左のような 4 つの性質を持つ場合をいう．このとき接ベクトル場 X による v の**リー微分**とは次のような微分のことである：

(1) $\rho(\psi(X)_t) : V \to V$ は線形写像
(2) $\rho(\psi(X)_s\psi(X)_t)v = \rho(\psi(X)_s)\rho(\psi(X)_t)v$
(3) $\rho(\psi(X)_0)v = v$
(4) $\rho(\psi(X)_t)v$ は t について C^∞

$$\mathcal{L}_X v = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0}\rho(\psi_t)v = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(\rho(\psi_t)v - v\big). \tag{2.6}$$

これは 1 径数群の微分可能な作用があればいつでも定義できるから，いろいろ

なところで定義される．X, Y および $[X,Y]$ が完備ベクトル場のときには

$$(\mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X)v = \mathcal{L}_{[X,Y]}v \tag{2.7}$$

が成立する．

ψ_t による引き戻し ψ_t^* は $\mathcal{F}_M^*$ 上の自己同型で $\psi_t^*(\mathcal{F}_M^{(p)}) = \mathcal{F}_M^{(p)}$ である．したがって微分形式に対するリー微分は $\mathcal{L}_X\omega = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\psi_t^*\omega$ で定義される．これは外微分環 $(\mathcal{F}_M^*, \wedge)$ の微分を与える．とくに $\mathcal{L}_X f = Xf$ である．

$\psi_t^* : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ は自己同型だから $Y \in \mathcal{X}_\mathcal{O}$ に対して

$$(d\psi_t)(Y) : \mathcal{O} \to \mathcal{O}, \quad (d\psi_t)(Y)f = \psi_{-t}^* Y(\psi_t^* f)$$

と定義するとこれも微分となるから，$d\psi_t$ は $\mathcal{X}_\mathcal{O}$ から $\mathcal{X}_\mathcal{O}$ への線形写像であるが，これも可微分な作用であり，次が成立する：

$$\mathcal{L}_X : \mathcal{X}_\mathcal{O} \to \mathcal{X}_\mathcal{O}, \quad \mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

リー微分の計算法

リー微分は $\mathcal{L}_X f = Xf$ と $\mathcal{L}_X Y = [X,Y]$ と積の微分ルールだけから計算される．1 次微分形式 ω に対するリー微分 $\mathcal{L}_X\omega$ の公式は

$$X\omega(Y) = \mathcal{L}_X(\omega(Y)) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y) + \omega(\mathcal{L}_X Y)$$

という計算から得られる．$\omega = df$ のとき，

$$X(df(Y)) = \mathcal{L}_X(Yf) = (\mathcal{L}_X df)(Y) + df(\mathcal{L}_X Y)$$

でつじつまが合っていることがわかるだろう．一般の外微分形式については

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y_1, \cdots, Y_p) = X\omega(Y_1, \cdots, Y_p) - \sum\nolimits_i \omega(Y_1, \cdots, [X, Y_i], \cdots, Y_p)$$

という定義になる．引き戻しと微分形式，外微分との間には第 1 章で見たように

$$\psi_t^*(\omega\wedge\omega') = (\psi_t^*\omega)\wedge(\psi_t^*\omega'), \quad d(\psi_t^*\omega) = \psi_t^* d\omega$$

が成立するから，これをリー微分して次の公式が得られる：

$$\mathcal{L}_X(\omega\wedge\omega') = (\mathcal{L}_X\omega)\wedge\omega' + \omega\wedge(\mathcal{L}_X\omega'), \quad \mathcal{L}_X d\omega = d\mathcal{L}_X\omega. \tag{2.8}$$

2.1.3 さまざまな微分幾何的概念

(2.3) 式や (2.5) 式を解くには多様体を仮定するかあるいはそれに替わるものを仮定しないといけないのだが，その前にさまざまな微分幾何的概念の定義を（存在証明抜きで）与えておこう．

$\mathcal{X}_\mathcal{O}$ から $\mathcal{O}$ への線形写像 ω で，$\forall f \in \mathcal{O}$ に対して $\omega(fX) = f\omega(X)$ という性質（これを **$\mathcal{O}$-線形性**と呼ぶ）があるものを **1 次微分形式**といい，その全体を $\mathcal{X}_\mathcal{O}^*$ または $\mathcal{F}_\mathcal{O}^{(1)}$ と書く．$\mathcal{O}\mathcal{X}_\mathcal{O}^* = \mathcal{X}_\mathcal{O}^*$ は明らかであろう．

前に与えた接ベクトル空間の定義と同様にして，$p \in M$ に対して商空間 $T_p^*M = \mathcal{X}_\mathcal{O}^*/\mathcal{O}_p\mathcal{X}_\mathcal{O}^*$ を p における**余接ベクトル空間**と呼ぶ．$\mathcal{X}_\mathcal{O}^*$ から T_p^*M への自然な射影を π_p とする．T_p^*M の元を**余接ベクトル**（またはコベクトル）と呼ぶ．

1 次微分形式 $\omega : \mathcal{X}_\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ は，点 $p \in M$ を任意に固定し，$\omega(X)(p)$ を考えれば $\mathcal{O}$-線形性より，$\omega(X + \mathcal{O}_p\mathcal{X}_\mathcal{O})(p) = \omega(X)(p)$ だから線形写像 $\omega(p) : T_pM \to \mathbb{R}$ を引き起こす．$\omega(p)$ を ω の p **への制限，または，p における値**と呼ぶ．

$$(\omega + \mathcal{O}_p\mathcal{X}_\mathcal{O}^*)(X + \mathcal{O}_p\mathcal{X}_\mathcal{O})(p) = \omega(X)(p) = \omega(p)(X_p) \tag{2.9}$$

だから $\pi_p(\omega) = \omega(p)$ である．

$\mathcal{X}_\mathcal{O}$ も $\mathcal{X}_\mathcal{O}^*$ も，$\mathcal{O}$ を係数環とするベクトル空間である．$\mathcal{O}$-線形性が「点 p での値」という概念を成立させることに本質的役割をはたしている．

$\forall f \in \mathcal{O}$ に対し，$df : \mathcal{X}_\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ を $df(X) = X(f)$ で定義すると，$df(gX) = (gX)(f)$ だから $\mathcal{O}$-線形性があり，$df \in \mathcal{X}_\mathcal{O}^*$ となる．これを f の**全微分**という．

線形写像 $L : T_pM \to \mathbb{R}$ の全体はまた線形空間になる．これを T_pM の**双対**（そうつい）**空間**と呼んで，$(T_pM)^*$ と書く．

補題 2.2 線形空間として $T_p^*M \subset (T_pM)^*$ である．等号は一般には成り立たないが，M が有限次元 C^∞-多様体のときには $T_p^*M = (T_pM)^*$ である．

証明 $X \in T_p^*M$ が線形写像 $T_pM \to \mathbb{R}$ を引き起こすことはわかるであろう．引き起こされた線形写像が 0 とすると，$\forall X \in \mathcal{X}_\mathcal{O}$ で $\omega(X)(p) = 0$ となることを意味するから式 (2.9) より，$\omega(p)(X) = 0$ ということであり，これは $\omega(p) = 0$ を意味する．よって $T_p^*M \subset (T_pM)^*$ である．

$L \in (T_pM)^*$，つまり線形写像 $L: T_pM \to \mathbb{R}$ は $L: \mathcal{X}_\mathcal{O}/\mathcal{O}_p\mathcal{X}_\mathcal{O} \to \mathcal{O}/\mathcal{O}_p$ のことであったわけだが，この L に対して $\mathcal{O}$-線形写像 $\omega: \mathcal{X}_\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ で $\omega(p) = L$ となるものがあれば $L \in T_p^*M$ である．このことは一般には保証されないが，M が有限次元 C^∞-多様体のときには，p を含む局所座標系を用いて $f \in \mathcal{O} = C^\infty(M)$ で $(df)(p) = L$ となるものがつくれる．　（証明終わり）

一般に多重 $\mathcal{O}$-線形写像

$$T: \mathcal{X}_\mathcal{O} \overbrace{\times \cdots \times}^{p} \mathcal{X}_\mathcal{O} \times \mathcal{X}_\mathcal{O}^* \overbrace{\times \cdots \times}^{q} \mathcal{X}_\mathcal{O}^* \longrightarrow \mathcal{O}$$

を (p,q)-**テンソル場**と呼ぶ．$(p,0)$-テンソル場 T で，$T(X_1, \cdots, X_p)$ が $X_1, \cdots, X_p$ のどれか 2 つを入れ換えると符号が代わるという性質（交代性）を持つとき **p-次微分形式**と呼ぶ．これも，$\mathcal{O} = C^\infty(M)$ の場合には第 1 章で定義したものと同じである．p-次微分形式の全体を $\mathcal{F}_\mathcal{O}^{(p)}$ と書く．

記号がいり乱れてきたのでこれまでのものを整理して書き出してみると次のようになる：

$\mathcal{X}_\mathcal{O}$; 接ベクトル場の全体	微分; $\mathcal{O} \to \mathcal{O}$
$T_pM = \mathcal{X}_\mathcal{O}/\mathcal{O}_p\mathcal{X}_\mathcal{O}$	p における接ベクトル空間
$T_{p;\mathcal{O}}^* = \mathcal{O}/\mathcal{O}^2$	教科書によってはこれを余接ベクトル空間と呼んでいる．
$\mathcal{X}_\mathcal{O}^* = \mathcal{F}_\mathcal{O}^{(1)}$;1 次微分形式	$\mathcal{O}$-線形; $\mathcal{X}_\mathcal{O} \to \mathcal{O}$
$T_p^*M = \mathcal{X}_\mathcal{O}^*/\mathcal{O}_p\mathcal{X}_\mathcal{O}^*$	p における余接ベクトル空間
$\mathcal{X}_\mathcal{O}^{**}$	$\mathcal{O}$-線形; $\mathcal{X}_\mathcal{O}^* \to \mathcal{O}$

上の概念構成は $\mathcal{X}_\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}$-線形性を基礎にしているが，$X: \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ 自身は微分であって，$\mathcal{O}$-線形性はない．ここにやや理論の不統一さを感ずる人も多いと思うが，テンソル解析では $Xf \in \mathcal{O}$ は X と df の自然な内積 $\langle X, df \rangle$ のことだと考えるのである．

2.1.4　共変微分

前に定義したリー微分はテンソル場をテンソル場に写すが，これとは別に多様体上では**共変微分**という微分法がある．これは多様体上で局所座標系によらない意味を付けながら微分を考えるときに便利な微分法であるが，いろいろな

ものがある．定義を与えるだけならば，やはり多様体は不要である[4]．

共変微分とは $\mathcal{X}_\mathcal{O} \times \mathcal{X}_\mathcal{O}$ から $\mathcal{X}_\mathcal{O}$ への双線形の写像で，$\forall X, \forall Y \in \mathcal{X}_\mathcal{O}, \forall f \in \mathcal{O}$ に対して左のような性質を持つもののことである．

(1) $\nabla_X Y \in \mathcal{X}_\mathcal{O}$
(2) $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
(3) $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$

$\mathcal{O}$-線形性が X のほうにのみ仮定されているのと，この定義では $\nabla_X Y$ は接ベクトル場，つまり $\nabla_X Y : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ は微分でなければならないのだが，このことはたんに仮定され，宣言されているだけである．接ベクトル場 Y は $\mathcal{O}$ 上の微分という演算子として意識されているのではなく，Y それ自身で存在していると考えるのであるから，$\nabla_X Y$ を書けば十分で，$(\nabla_X Y)(f)$ なる演算を与えて $\nabla_X Y$ を決めているのではないのである．

リー微分と共変微分

リー微分が無限小変換の感覚を基礎にしていたのに対し，共変微分は無限小平行移動の感覚を基礎にしている．

共変微分を定義することを**接続** (connection) を与えるという．定義するだけならば多様体は不要であるが，存在を示すのは別問題である．共変微分は接ベクトル場に対して定義されてしまえば，すべてのテンソル場に拡張して定義される．たとえば，$\omega \in \mathcal{X}_\mathcal{O}^*$ に対しては

$$(\nabla_X \omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega(\nabla_X Y), \quad Y \in \mathcal{X}_\mathcal{O}$$

と定義する．$\nabla_X \omega \in \mathcal{X}_\mathcal{O}^*$ であること（$\mathcal{O}$-線形性）はすぐわかる．この定義は要するに Xf も共変微分 $\nabla_X f$ のことだと考えたときに

$$\nabla_X(\omega(Y)) = (\nabla_X \omega)(Y) + \omega(\nabla_X Y) \quad \text{（積の微分ルール）}$$

が成立するように定義したのである．共変微分をテンソル場に拡張して定義するときには**このルールを優先させて常識的に**定義する．

微分法はいつでもルールのほうが優先するのである．共変微分による計算法が**絶対微分学**と呼ばれていた時代もあった．

4) 多様体上での取り扱いは 8.1 節参照.

とはいうものの，テンソル解析で考えるときには，接ベクトル場 $X \in \mathcal{X}_{\mathcal{O}}$, $f \in \mathcal{O}$ に対して，$Xf \in \mathcal{O}$ は各点ごとの内積 $\langle X, df \rangle$ のことだと**考えることになっている**．したがって，テンソル解析では

$$X(Yf) = \nabla_X(Yf) = \langle \nabla_X Y, df \rangle + \langle Y, \nabla_X df \rangle$$

であって，$\nabla_X(Yf) = (\nabla_X Y)f + Y(\nabla_X f)$（これはリー微分の公式）ではないのである．リー微分と違うのは X について $\mathcal{O}$-線形性があることである．この違いは重大で，**テンソル解析が量子化されていない**（究極的には重力理論が量子化されていない）と多くの人が思う理由にもなっている．

共変微分の考え方

基底 $(\boldsymbol{e}_1, \cdots, \boldsymbol{e}_n)$ が決まっているユークリッド空間上のベクトル場 $\boldsymbol{v} = \sum_i v^i(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_i$ を微分せよといわれれば，係数だけを微分してしまうのが普通であろうが，共変微分はこのとき，基底も動くと考えて

$$\partial_{x^k}\boldsymbol{v} = \sum_i (\partial_{x^k} v^i(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{e}_i + \sum_i v^i(\boldsymbol{x})(\partial_{x^k}\boldsymbol{e}_i)$$

のように基底の微分も考える微分法である．しかし，同じ記号を使うわけにはいかないから，

$$\nabla_{\partial_{x^k}}\boldsymbol{v} = \sum_i (\partial_{x^k} v^i(\boldsymbol{x}))\boldsymbol{e}_i + \sum_i v^i(\boldsymbol{x})\nabla_{\partial_{x^k}}\boldsymbol{e}_i$$

のように書く．$\nabla_{\partial_{x^k}}\boldsymbol{e}_i$ は別に $\nabla_{\partial_{x^k}}\boldsymbol{e}_i = \Gamma^j_{ki}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{e}_j$ のように与える．Γ^j_{ki} は**接続の係数**と呼ばれる．

振率テンソル場，曲率テンソル場

接続が与えられたとき $X, Y \in \mathcal{X}_{\mathcal{O}}$ それぞれについて

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y] \tag{2.10}$$

が $\mathcal{O}$-線形性を持つことが容易に示せる．$(X, Y, \omega) \to \omega(T(X, Y))$ のように考えると，$(2, 1)$ 歪対称テンソル場である．T を **振率**（れいりつ）**テンソル場**と呼ぶ．さらに

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.11}$$

とし，これを，**曲率テンソル場**と呼ぶ．X, Y, Z に関する $\mathcal{O}$-線形性は定義に基づいて計算してみるとわかる．$R(X,Y)(\omega)$ は

$$R(X,Y)(\omega) = \nabla_X \nabla_Y \omega - \nabla_Y \nabla_X \omega - \nabla_{[X,Y]} \omega$$

と定義されるが

$$(R(X,Y)(\omega))(Z) = -\omega(R(X,Y)Z) \tag{2.12}$$

が成立することが容易にわかる．R は $(3,1)$-テンソル場と考えられる．

後で使う**ビアンキ** (Bianchi) **の恒等式**と呼ばれる等式を与えておこう．

補題 2.3　T を捩率テンソル場として

$$R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y - \nabla_X T(Y,Z) \\ -\nabla_Y T(Z,X) - \nabla_Z T(X,Y) = 0.$$

さらに $R(X,Y)$ を線形写像と見てその線形写像を共変微分するために

$$(\nabla_X R(Y,Z))(W) = \nabla_X (R(Y,Z)W) - R(X,Y)\nabla_X W$$

と定義すると

$$\nabla_X R(Y,Z) + \nabla_Y R(Z,X) + \nabla_Z R(X,Y) \\ -R([X,Y],Z) - R([Y,Z],X) - R([Z,X],Y) = 0.$$

証明はいずれもていねいに書いてみればよい．第 2 式だけをビアンキの恒等式と呼ぶ人もいるが，この式の意味は (2.13) 式で与える外微分の定義式と見比べて考えてほしい（$\nabla_X R$ を XR に置き換えてみる）．共変外微分 d_∇ というものを定義すると，ビアンキの恒等式は自然に $d_\nabla R = 0$ という式と同値になる．

計量

次に**計量**という概念を定義しておこう．双線形写像 $G : \mathcal{X}_\mathcal{O} \times \mathcal{X}_\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ が $\forall X$, $\forall Y \in \mathcal{X}_\mathcal{O}$, $\forall f \in \mathcal{O}$ に対して左の性質を持つとき**計量**と呼ぶ．最後の性質は**非退化**と呼ばれる性質で，正確には $G(Z,X)(p) = 0$ が $\forall X \in \mathcal{X}_\mathcal{O}$ で成立するときには $Z(p) = 0$ であると読む．

(1) $G(X,Y) = G(Y,X)$ （対称）
(2) $G(fX,Y) = fG(X,Y)$ （$\mathcal{O}$-線形）
(3) $G(Z,\forall X)(p) = 0 \Rightarrow Z(p) = 0$

この性質から，$G(X,Y)(p)$ は実は $X(p), Y(p)$ にしかよらないことがわかる．したがって $G(X,Y)(p)$ は対称双線形写像 $T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ を引き起こす．これを $\tilde{G}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ と書く．$\tilde{G}_p$ が正定値のとき **$\mathcal{O}$-リーマン (Riemann) 計量**と呼び，これが与えられた $(\mathcal{O}, M)$ のことを **$\mathcal{O}$-リーマン多様体**と呼ぶ．

内積を素朴な長さや角度の概念の数学的表現と考えると正値性は当然のように思われるのだが，計算上や使われ方を見ていくと，正値性より非退化性のほうがよく使われていることがわかる．

$\dim T_pM = n$ であり，$\tilde{G}_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ が非退化対称のときにはおなじみの平方完成で，T_pM の線形基底をうまく取り直して

$$\tilde{G}_p(X,X) = (X^1)^2 + \cdots + (X^r)^2 - (X^{r+1})^2 - \cdots - (X^n)^2$$

のように標準系に直すことができる．このとき $+1$ の個数とか -1 の個数はどんなやりかたをしても変わることがないというのが線形代数で教わるシルベスター (Sylvester) の定理である．

$(r, n-r)$ を $\tilde{G}_p$ の**型**と呼ぶ．$\tilde{G}_p$ の型は変わるとすれば 1 ずつジャンプするしかないのだから，$\dim T_pM$ が p によらず一定 $n(<\infty)$ で非退化の計量 $G : \mathcal{X}_\mathcal{O} \times \mathcal{X}_\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ が与えられたときには G の型は p によらずに一定している．$\tilde{G}_p$ の型が $(1, n-1)$ であるような計量を **$\mathcal{O}$-ローレンツ (Lorentz) 計量**と呼び，これが与えられた $(\mathcal{O}, M)$ を **$\mathcal{O}$-ローレンツ多様体**と呼ぶ．

計量 G（正定値としなくてよい）が与えられたとき，捩率テンソル場 T が 0 でかつ $\nabla G = 0$ となるような接続を**計量接続**と呼ぶ．有限次元多様体のときにはこれは一意的に存在して，接続の係数 Γ^j_{ki} が後の 2.2.3 項で述べるクリストッフェル (Christoffel) 記号と呼ばれる記号で与えられる．

また，計量の概念は $\mathcal{X}_\mathcal{O}$ ばかりでなく，$\mathcal{X}^*_\mathcal{O}$ 上でも $\mathcal{O}$-双線形，対称，非退化な $G : \mathcal{X}^*_\mathcal{O} \times \mathcal{X}^*_\mathcal{O} \to \mathcal{O}$ として同様に定義される．要するに $\mathcal{O}$-双線形，対称，非退化という概念が設定できればよいのである．

外微分

微分形式には外微分というものがあったが，これも抽象的に定義される．$\theta \in \mathcal{F}^{(p)}_\mathcal{O}$ に対して $d\theta \in \mathcal{F}^{(p+1)}_\mathcal{O}$ を次式で定義する：

$$d\theta(X_1,\cdots,X_{p+1})=\sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}X_i\theta(X_1,\cdots,\check{X}_i,\cdots,X_{p+1})$$
$$+\sum_{i<j}(-1)^{i+j}\theta([X_i,X_j],X_1,\cdots,\check{X}_i,\cdots,\check{X}_j,\cdots,X_{p+1}). \qquad (2.13)$$

$\check{X}_i$ などはその部分が抜けていることを表す.

θ が $\mathcal{O}$-多重線形性を持っているとき $d\theta$ も $\mathcal{O}$-多重線形性を持つことは (2.2) 式を使って $p=1,2,3$ ぐらいのところを書いてみればわかる.

これがわかれば，M が多様体で，$\mathcal{O}=C^\infty(M)$ の場合には局所座標系の上に制限して考えられるから，$[\partial_i,\partial_j]=0$ であることに注意すると，上の定義と 1.3.2 項で与えたものと一致することがわかる．しかし，上の定義のまま $d^2\theta=0$ を示すのはかなり面倒である.

(1) $\Omega(X,Y)=-\Omega(Y,X)$（歪対称）
(2) $\Omega(fX,Y)=f\Omega(X,Y)$（$\mathcal{O}$-線形）
(3) $d\Omega(X,Y,Z)=0$
(4) $\Omega(Z,\forall X)(p)=0\Rightarrow Z(p)=0$

双線形写像 $\Omega:\mathcal{X}_\mathcal{O}\times\mathcal{X}_\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ が $\forall X,\forall Y\in\mathcal{X}_\mathcal{O}$, $\forall f\in\mathcal{O}$ に対して左の 4 つの性質を持つとき**シンプレクティック形式**と呼ぶ．(4) の性質は**非退化**と呼ばれる性質である．計量と違って対称が歪対称に代わっている．これが与えられた $(\mathcal{O},M)$ のことを $\mathcal{O}$-**シンプレクティック多様体**と呼ぶ.

最後の性質から，$\Omega(X,Y)(p)$ は実は $X(p),Y(p)$ にしかよらないことがわかって，したがって $\Omega(X,Y)(p)$ は歪対称双線形写像 $T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ を引き起こす．これを $\tilde{\Omega}_p:T_pM\times T_pM\to\mathbb{R}$ と書くと，$\dim T_pM<\infty$ のときには，T_pM の線形基底を使うと $\tilde{\Omega}_p$ は実歪対称行列で表示される．ところが実歪対称行列の固有値は純虚数であり必ず複素共役と対になって現れるから $\dim T_pM=$ 奇数のときには固有値の中に必ず 0 が現れる．つまり，$\tilde{\Omega}_p$ の行列式は 0 となる．$\tilde{\Omega}_p$ が非退化となるためには（有限次元ならば）$\dim T_pM=2n$（偶数）でないといけない．非退化の条件は微分形式としての積で $\Omega^n\neq 0$ と同値である.

2.2　なぜ多様体が必要だったか？

このように述べてくると，多様体という概念はだんだん影が薄くなってくるであろうが，概念の一応の定義ができただけでは話は終わらない．世の中には

言葉だけで実のないものはたくさんある．だから，積分曲線や，接続の存在のところで1の分解（2.2.2 項参照）を使ったり，積分曲線の存在を示すために常微分方程式系に持ち込んだりするために多様体が必要になるのである．

> 多様体とは接続の存在とか常微分方程式の解の存在を保証するために持ち込まれたいわば**必要悪**である．

したがってこのような存在が組み込まれている対象ならば多様体でなくてもよいのであるが，はたしてそのような都合のよいものが多様体以外に存在しているのだろうか？（3.3.3 項，11.1 節でそのような例を与える．）

ことさら多様体を敵視するような発言をしたが，これには以下のような理由がある．ほぼ百年も前から指摘されていることだが，電磁場のようなものを量子論的に扱う場の理論には「発散の困難」と呼ばれるものがある．これは当然有限であるべき量が計算すると無限大になってしまうというもので，数学的には「矛盾」としかいいようのないものである．数学者ならばただちにそこにとどまって前進することをあきらめるような性質のものである．

物理学者がそうしないのは，「それでも現象は存在している」と考えるからではあるが，疑り深い哲学者ならば，もしかするとその現象そのものを否定してしまうかもしれないような深刻なものである．

> この矛盾，運動を論理的に考えることはできないとするギリシャ時代のパラドックスに似ていないだろうか？

物理では，「この発散の困難は重力場の理論が量子化できれば解消する」などといわれることがあるが，この深意は「量子重力理論まで完成しないと発散の困難は解消しない」ということであり，いかにこれが難しいものであるかを間接的に述べている言葉だと思うほうがよい．

古典重力理論はテンソル解析という古典微分幾何を縦横に使って書かれており，古典微分幾何学と古典重力理論は切っても切れない深い関係にある．したがって，量子重力理論が完成するということは同時に古典微分幾何学の量子化が完成するということとほとんど同じことなのである．

物理学の最前線では，場の理論の発散の困難を解消すべく悪戦苦闘している

のが現状であるが，しだいに

発散の困難の原因

> 発散の困難の真の原因は**点集合としての多様体**の上の上部構造として「場の理論」をつくってしまうせいである．

という理解に変わってきている．つまり，多様体以外のものに乗り換えて幾何学をつくることでこの困難を解消しようという方向に向かっているのである．

これは，「空間」と呼んできたものの理解を変えるということなので，数学，とくに幾何学にとっては無視できない動きである．しかし，現状では多様体から完全に離れ切ることはできないのである．第一，点集合になっていない「空間」を数学の論理の中にどのように組み入れたらよいのかよくわかっていないのである．

2.2.1　常微分方程式系と積分曲線

先験的に多様体を認めて，多様体上で話をするときは，結局局所座標系で表示して $\mathbb{R}^n$ の開集合に話を持ち込むのである．講義技術が進歩したから，面倒な存在証明など意識に上らないくらいに整備されてきてはいるが，これは面倒な存在証明など不要だといっているのとは違う．

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$\mathcal{O} = C^\infty(U)$（$U$ 上の C^∞-関数の全体）とすると，曲線 p_t の動きは**座標関数の動き**として $p_t = (x^1(t), \cdots, x^n(t))$ と表される．使う元は限定されているが $f \in \mathcal{O}$ の動きとして表示していることに変わりはない．$p \in U$ における接ベクトル X_p は $(x^1, \cdots, x^n)$ を U の座標関数として $X_p = \sum_{i=1}^n X^i \partial_{x^i}\big|_p$, $X^i \in \mathbb{R}$ のように書かれるから，p_t の接ベクトルは次のように書かれる：

$$\frac{d}{dt}p_t\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt}x^i(t)\Big|_{t=0}\partial_{x^i}\big|_p$$

接ベクトル場 X は $\mathcal{O} = C^\infty(U)$ の場合は $X(f)(p) = \sum_{i=1}^n X^i(p)\partial_{x^i} f\big|_p$ と表示されるが，p, f を省略して書くと，

$$X = \sum_{i=1}^n X^i(\boldsymbol{x})\partial_{x^i}, \quad \boldsymbol{x} = (x^1, \cdots, x^n) \tag{2.14}$$

のように表示される．これは前頁のような書き方では

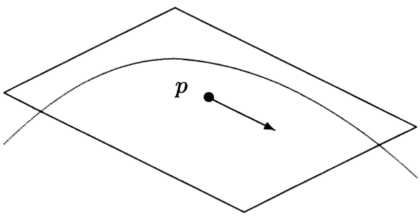
$$\sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dt} x^i(t) \partial_{x^i} f(p_t) = \sum_{i=1}^{n} X^i(x(t)) \partial_{x^i} f(p_t)$$

ということで，f が任意だから $\partial_{x^i} f(p_t)$ の部分を省略して

$$\frac{d}{dt} x^i(t) = X^i(\boldsymbol{x}(t)), \qquad i = 1, \cdots, n \tag{2.15}$$

と書かれる．$\mathcal{O} = C^\infty(U)$ の場合は Xf_t は偏微分で書かれるのでそれに調子を合わせて，(2.5) 式は

$$\partial_t f(t, \boldsymbol{x}) = \sum_i X^i(\boldsymbol{x})(\partial_{x^i} f)(t, \boldsymbol{x}) \tag{2.16}$$



と書かれる．これは偏微分方程式であり，一見難しそうに見えるが，(2.15) 式が解けているときは $f_t(p) = f(p_t)$ とおいてやればよい．(2.15) 式は常微分方程式系であり，これはかなりのことがわかっている．

つまり微積分をつくった結果，常微分方程式は高校生でも理解可能なものとなり[5)]，運動は何の障害もなく考えられ，未来予測も可能になったというのである[6)]．

19 世紀の素朴な理解（決定論）

運動の法則は常微分方程式系で与えられ，個々の運動はその解（積分）として与えられる．初期条件さえ知ればわれわれは完全に未来を予測できる．われわれが未来を予測できないのは，初期条件に対する知識が不足しているせいであって，それ以外のものではない．

決定論はギリシャ時代のパラドックスに対する解答であり，勝利宣言でもあった．しかし，それは本当だろうか？

5)　常微分方程式系の解の存在とか初期点に関する一意性などについては常微分方程式論の教科書（たくさんある）参照．

6)　この考え方がいかに強烈であったかは「決定論」にまつわって，「人間の自由意志の存在」がまじめに論議された時代があったことで推察がつく．つまり，何もかも常微分方程式系で与えられる法則で記述できるとしたら，そしてそれが人間の意志活動にまで及ぶのだとしたら，人間の自由意志など存在するのだろうか？　という論議である．

$\mathcal{O} = C^\infty(\mathbb{R})$ のときに，(2.3) 式を実際に書いてみると $\frac{d}{dt}x(t) = x(t)^2$ のようなものも出てくる．これを解くと $x(t) = \frac{x_0}{1-x_0 t}$ であるから，時刻 $t = 0$ で x_0 にいた質点が時刻 $t = \frac{1}{x_0}$ では無限のかなたに飛び去って消滅してしまうことを表している．このように，X の積分曲線 p_t で有限時刻で無限遠方に飛んでいったりするところがあると，$f_t(p) = f(p_t)$ がつくれなくなるので (2.16) 式は解けなくなるのである．

> 「矢は永久に進めない」というギリシャ時代のパラドックスは連続体を考え，微積分をつくることで克服できたと考えて本当によかったのだろうか？

後で述べる（4.2.1 項）リー群の考え方からすると，微分には無限小の自己同型という意味が本当にあってほしいから上のような例はなるべく排除したいのである．しかし，コンパクトでない多様体，さらに無限次元多様体上の接ベクトル場などを考えるときには始めから完備であることがわかっているような接ベクトル場に話を限らないとほとんど何も結論できない．最後の章で述べる汎リー群の理論はこういうときに話の大枠を設定するのに役に立つのである．

2.2.2 「数学的存在」の証明

「自然数の概念，集合論を無矛盾と認めさえすれば，これも無矛盾なのである」という説明ですべてを組み立てているのが数学である．数学が最も厳格な学問だとされるのは，（その全部を見せるには膨大な紙面を要するが）すべてをこのレベルから組上げているからである．この項で後で使う数学の技術を少し紹介しておこう．

> ここでいう存在とは「実在」の意味ではない（第一，実在って何だろう）．数学では自然数と同じレベルで矛盾なく定義できるもののみを存在と考えるのである．その意味ではエネルギーとか時間のような物理の基本概念でさえも数学的存在とは認めていないのである．

位相空間内の可算性

X を位相空間とする．$p \in X$ について p を含む開集合全体を p の開近傍系

と呼び $\mathcal{U}_p$ と書く．p を含む可算個の開集合の族 $\{U_i; i=1,2,\cdots\}$ が $\mathcal{U}_p$ の**可算基**であるとは $\forall V \in \mathcal{U}_p$ に対して，うまく i を選ぶと $U_i \subset V$ とできる場合をいう．X の任意の点が可算基を持つとき，X は**第 1 可算性**を持つという．

可算個の点よりなる X の部分集合 S で X の中で稠密，つまり S を含むどんな閉集合も X 全体になる場合，X を**可分** (separable) という．

位相空間 X が可分でかつ第 1 可算性を持つとき**第 2 可算性**を持つという．

位相空間の開被覆

X を位相空間とする．X の開部分集合の族（集まり）$\{U_\alpha; \alpha \in I\}$ が X を覆っているとき，つまり $\bigcup_{\alpha\in I} U_\alpha = X$ となるとき，X の**開被覆**と呼ぶ．添字の集合 I は何でもかまわないが，I が有限集合のとき **有限開被覆** と呼ぶ．

X の開被覆 $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$ が**局所有限開被覆**であるとは $\forall p \in X$ に対して，p を含む U_α が有限個しかない場合をいう．

X の開被覆を $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$, $\{V_\beta; \beta \in J\}$ とする．$\{V_\beta; \beta \in J\}$ が $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$ の**細分**であるとは，$\{V_\beta; \beta \in J\}$ が $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$ より**細かい被覆**であるというイメージで，$\forall V_\beta$ に対して $V_\beta \subset U_\alpha$ となる U_α が必ず見つかる場合をいう．

X が**パラコンパクト**であるとは X の任意の開被覆に対して，その細分で局所有限な開被覆が見つかる場合をいう．定義だけ見るとパラコンパクトはコンパクトの概念に近いように思うかもしれないが，すべての距離空間はパラコンパクトである．また第 2 可算性を持つ位相空間はパラコンパクトである．

多様体上での証明技術

多様体はかなり長い時間をかけていろいろな証明技法を開発してきた．これと同じくらい強力なものをつくり出せといわれても，すぐに代わるものを提出できるほどやさしくはないのである．

1 の分解

位相空間 X 上の非負値連続関数の族 $\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ が **1 の分解**であるとは，$S_\alpha = \{x; f_\alpha(x) > 0\}$ としたとき，$\{S_\alpha; \alpha \in A\}$ が X の局所有限開被覆となり，各点 $x \in X$ において $\sum_\alpha f_\alpha(x) = 1$ となることをいう．さらに $\{S_\alpha; \alpha \in A\}$ が X の開被覆 $\{U_\beta; \beta \in I\}$ の細分になっているとき，$\{f_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は $\{U_\beta; \beta \in I\}$ に**従属する 1 の分解**という．X がパラコンパクトのときには任意の開被覆に対

してそれに従属する 1 の分解が存在する．

多様体での応用

M を第 2 可算性を持つ（あるいはパラコンパクトな），C^∞-多様体とする．M の任意の開被覆 $\{U_\beta; \beta \in I\}$ に対してそれに従属する 1 の分解 $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$ があるわけだが，C^∞-多様体上では f_α を C^∞-関数として選べることが（近似定理により）わかっている．

1 の分解は何かと便利な働きをする．2, 3 例を示しておこう．

$\mathcal{X}_\mathcal{O}^*$ から $\mathcal{O}$ への $\mathcal{O}$-線形写像を考えて，その全体を $\mathcal{X}_\mathcal{O}^{**}$ とする．$X \in \mathcal{X}_\mathcal{O}$ に対して $\mathcal{O}$-線形写像 $X^{*\prime} : \mathcal{X}_\mathcal{O}^* \to \mathcal{O}$ を $X^{*\prime}(\omega) = \omega(X)$ で定義すると，$X^{*\prime} \in \mathcal{X}_\mathcal{O}^{**}$ である．

$X^{*\prime} = 0$ ということは $\omega(X) = 0$ がすべての $\omega \in \mathcal{X}_\mathcal{O}^*$ で成立するということだが，一般には $X \to X^{*\prime}$ が単射とも，全射ともいえない．

補題 2.4　M がパラコンパクトな有限次元 C^∞-多様体の場合には $X \to X^{*\prime}$ は全単射となる．

証明　$X \to X^{*\prime}$ で $X \neq 0$ とすると $X(p) \neq 0$ となる $p \in M$ がある．すると，局所座標系を使って $f \in \mathcal{O} = C^\infty(M)$ で $Xf \neq 0$ となるものがある．すると $df(X) \neq 0$ となる．これより単射であることがわかる．

全射であることを示すには $\mathcal{O}$-線形写像 $\forall X' : \mathcal{X}_\mathcal{O}^* \to \mathcal{O}$ に対して $X'(\omega) = \omega(X)$ を満たす $X \in \mathcal{X}_\mathcal{O}$ の存在をいうのだが，M がパラコンパクト有限次元 C^∞-多様体の場合には局所座標系を使って $\omega = \sum f_i dx^i$ と書かれるので $X'(dx^i) = g^i$ とし，$X = \sum g^i \partial_{x^i}$ のようにする．（証明終わり）

補題 2.5　パラコンパクトな C^∞-多様体 M は C^∞-リーマン計量を持つ．

証明　多様体ということから M の開被覆 $\{U_\beta; \beta \in I\}$ で，各 U_β は $\mathbb{R}^n$ の開集合 V_β と可微分同相なものがとれる．この同相写像を φ_β とする．

$\{U_\beta; \beta \in I\}$ に従属する 1 の分解を $\{f_\alpha\}_{\alpha \in A}$（$f_\alpha$ は C^∞-関数）としよう．$S_\alpha = \{p \in M; f_\alpha(p) > 0\}$ とする．各 S_α は開被覆 $\{U_\beta; \beta \in I\}$ のどれかに含まれるから，S_α を含むものをとって U_α とする．

可微分同相 $\varphi_\alpha : U_\alpha \to V_\alpha$ によって何もかも $V_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ に写して考えるので，φ_α の微分写像を $d\varphi_\alpha$ とする．

点 $p \in M$ の接空間を T_pM とし，ここに内積を

$$\tilde{g}_p(X,Y) = \sum_\alpha f_\alpha(p)\langle (d\varphi_\alpha)_p X, (d\varphi_\alpha)_p Y\rangle$$

と定義する．ただし $\langle X', Y'\rangle$ は $\mathbb{R}^n$ 上の自然な内積である．p を固定するごとに総和は有限だから，右辺は有限であり，$\tilde{g}_p(X,Y)$ が内積であることは容易にわかる．（証明終わり）

2.2.3　測地座標系

第2可算性を持つ C^∞-多様体 M はリーマン計量 g を入れて C^∞-リーマン多様体と思うことができる．リーマン計量を局所座標系を使って書けば，$X = X^i\partial_{x^i}$, $Y = Y^i\partial_{x^i}$ のとき，

$$g_p(X,Y) = g_{ij}X^iX^j \quad \text{（アインシュタイン記法）}$$

と書くのだが，$X^i = dx^i(X)$ だから

$$g_p(X,Y) = g_{ij}dx^i(X)dx^j(Y) = g_{ij}dx^i dx^j(X,Y)$$

と書いてもよいわけで，X, Y を消して $ds^2 = g_{ij}dx^i dx^j$ のようにも書く．

リーマン多様体では「曲線の長さ」という概念があるから2つの点を結ぶ「最短コース」というものが考えられる．感覚的には2点間に糸をピンと張ればよいわけだが，数学的には変分法を使って最短コースが満たす微分方程式を求めて，これを扱う．最短コースが満たす微分方程式は「測地線の方程式」と呼ばれている．ここでは天下りに微分方程式を与える．

g^{ij} を行列 (g_{ij}) の逆行列の (i,j)-成分，$g_{ij,a} = \partial_{x^a}(g_{ij})$ として，測地線の方程式を書くために**クリストッフェル記号**と呼ばれる記号を

$$\left\{ {k \atop ij} \right\} = \frac{1}{2}g^{ka}\left(g_{ia,j} + g_{ja,i} - g_{ij,a}\right) \quad \text{（アインシュタイン記法）} \tag{2.17}$$

のように定義する．測地線の方程式は次の式で与えられる：

$$\frac{d^2}{dt^2}x^i + \left\{ {i \atop jk} \right\}\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \cdots, n \quad \text{（アインシュタイン記法）} \tag{2.18}$$

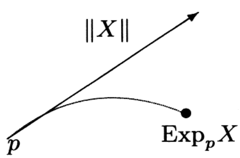
面倒な式に見えるが，測地線の方程式は「最短コース」が満たす方程式であるから，**感覚的には「まっすぐな線」**を書いただけである．

一方，測地線の方程式は感覚的には力の働いていない物体の運動が満たす式でもある．ガリレオの慣性法則によればそれは**等速直線運動**である．しかし，この両者が一致すべき先験的理由はない．

にもかかわらず，両者は一致する．このことは何を意味するのであろうか？ 深いところで物理学と幾何学とが同じ根を持っていることを示しているように思えるのである．

等速とは速度ベクトルの大きさが一定ということで $\frac{d}{dt}(g_{ij}\frac{dx^i}{dt}\frac{dx^j}{dt})=0$ のことである．これは $\boldsymbol{x}(t)$ が測地線（(2.18) 式を満たす曲線）であれば満たされることがわかる．

任意に $p \in M$ を固定して，**指数写像**と呼ばれる写像 $\mathrm{Exp}_p : T_pM \to M$ を下の図のように



$$\mathrm{Exp}_pX = \begin{Bmatrix} p \text{ から } X \text{ 方向に打ち出された測地線} \\ \text{上で } p \text{ からの距離が } \|X\| \text{ のところ} \end{Bmatrix}$$

と定義する．言い換えれば，p から X 方向にまっすぐ $\|X\|$ だけ進んだところということである．これは，p から初速 X で打ち出された，何の力も受けない物体が時刻 1 で到達する場所といってもよい．

Exp_p は接空間 T_pM の原点の近傍を M の p の近傍に C^∞- 同相に写していることが（逆写像定理を用いて）わかる．これを p の周りの**測地座標系**と呼ぶ．この座標系が C^∞ な座標系であることは感覚的にもわかるだろうが，大切なことは上の指数写像は p に関しても C^∞ になっているということである（これの使い方については 8.1.1 項などを参照）．しかし，多様体にわざと穴をあけておくことを考えれば，p から X 方向に打ち出された測地線がどこまでも延長できるとは限らない．このように「世界の果て」まで有限の距離で達することができるような計量ももちろんあるわけだが，どの点からどの方向に打ち出された測地線もどこまでも延長できるような（延長していったら同じ所に戻ってきてもよいが）リーマン計量を**測地的完備**なリーマン計量という．リーマン多様体ではリーマン計量を使って 2 点間の距離が定義できるが，この距離に関する（距離空間としての）完備性と測地的完備性が一致することが知られている．

また，リーマン多様体ではいつでも計量を変化させて測地的完備なリーマン

計量にすることができる．感覚的には世界の果てまでの距離が無限大になるように距離の測り方を改良すればよいのである．

> 宇宙空間に座標系を設定せよと言われたら，どうするだろう？　自分の場所を示す目印を何に求めればよいだろうか？　結局測地座標系しかないのではなかろうか？　測地座標系は自己中心座標系である．

また，指数写像 Exp_p が可微分同相写像となるのは一般には原点の近傍だけだが，$V_0(r), U_p(r)$ を T_pM の原点の半径 r の近傍，M における半径 r の p の近傍としたとき $\mathrm{Exp}_p : V_0(r) \to U_p(r)$ が可微分同相写像となるとして，r の最大値を点 p における**単射半径**と呼ぶ．

測地線がはっきりしてくれば，「最短線」という概念が使えるので，点をほぼ等間隔にばらまいて，それらを最短線でつないでいくという全国土を三角測量しているような手法で次のことがわかる（証明は省略する）．

補題 2.6　第 2 可算性を持つ C^∞-多様体は多面体と思うことができる．

こうなると今度は多面体独特の**重心細分**という概念が使え，それをもとに次のことがわかる．

補題 2.7　第 2 可算性を持つ C^∞-多様体は**単純被覆**と呼ばれる次の性質を持つ開被覆 $\{U_\alpha; \alpha \in I\}$ を持つ：

(1) U_α は単位開球体 $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ に同相．

(2) $m = 2, 3, \cdots$ について $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2} \cap \cdots \cap U_{\alpha_m}$ は $\emptyset$ でなければ単位開球体 $\{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| < 1\}$ に同相．

ポアンカレの補題

ついでにポアンカレ (Poincaré) の補題と呼ばれているものを説明しておこう．D を $\mathbb{R}^n$ 内の開集合で 単位開球体と同位相のものとする．次の補題はポアンカレの補題と呼ばれるが，ガウス－ストークス (Gauss-Stokes) の定理と並んで，連続体を考えるときに基本となるものである．

補題 2.8　D 上の p-次 C^∞-微分形式 $(p \geq 1)\omega$ で $d\omega = 0$ となるものは，同じ D 上の $(p-1)$-次 C^∞-微分形式 η を使って $\omega = d\eta$ の形に書かれる．

次の補題はパラメーター付きのポアンカレの補題と呼ばれる：D^r, D^s を $\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s$ 内の開集合でそれぞれの次元の単位開球体と同位相のものとする．$\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^s$ の座標関数をそれぞれ $x^1, \cdots, x^r$, $z^1, \cdots, z^s$ とする．$z^1, \cdots, z^s$ を任意に固定して上のポアンカレの補題を使うと次がわかる：

補題 2.9 $r \neq 0$, $p \geq 1$ とする．$D^r \times D^s$ 上の p-次 C^∞-微分形式 ω で $dz^1, \cdots, dz^s$ の項を含まず，$d\omega = 0$ となるものは同じ $D^r \times D^s$ 上の $(p-1)$-次 C^∞-微分形式 η で $dz^1, \cdots, dz^s$ の項を含まないものを使って $\omega = d_x\eta$ の形に書かれる．d_x は変数 $x^1, \cdots, x^r$ だけに関する外微分である．

2.2.4 自由テンソル代数，その商代数

ここで少し一般的に抽象代数の考え方について述べておこう．最も普遍的な結合代数は自由テンソル代数であり，どんな結合代数でも自由テンソル代数を関係式のイデアルで割って（商空間をつくって）得られることはわかっている．

> 自由テンソル代数は真っ白な紙みたいなものである．商代数をつくればワイル (Weyl) 代数，クリフォード代数何でも得られる．

ベクトル空間 V の基底を $X_1, \cdots, X_n$ としたとき，これを勝手な順序で（重複を許して）並べて，形式的に

$$X_\alpha = X_{\alpha_1} \otimes X_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes X_{\alpha_N}, \quad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$$

のようなものを考える．α_i は $1, \cdots, n$ である．以下では $\alpha = \emptyset$ の場合は $X_\emptyset = 1$ と考えることにする．X_α は**単項式**または**単語**と呼ばれ，N（これを $|\alpha|$ と書く）は単語 X_α の**長さ**と呼ばれる．$|\emptyset| = 0$ と約束する．

$X_1, \cdots, X_n$ で生成される**自由テンソル代数** (free tensor algebra) $\mathcal{T}^n$ とは $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を係数体として有限個の単語の 1 次結合（文章）をつくったものである．長さが k である単語の 1 次結合の全体 $\mathcal{T}^n(k)$ は n^k-次元部分空間となる．

$$\mathcal{T}^n(0) = \mathbb{C}, \qquad \mathcal{T}^n(k) = V \otimes \cdots \otimes V \quad (k \text{ 個})$$

である．単項式どうしの積は $\otimes$ をはさんでつなぐだけ（合成単語）とし，分配律で積を拡張する．これで結合代数になることは明らかであろう．$\mathcal{T}^n =$

$\sum_{k=0}^{\infty} \oplus \mathcal{T}^n(k)$ の元は $T = \sum c_\alpha X_\alpha$（有限和），$\alpha_i \in \{1, \cdots, n\}$ のように書かれている[7]．

ハイゼンベルグ代数，ワイル代数

$\mu, x^1, \cdots, x^m, y_1, \cdots, y_m$ で生成される自由テンソル代数 $(\mathcal{T}^{2m+1}; \otimes)$ で

$$x^i \otimes x^j - x^j \otimes x^i, \quad y_i \otimes y_j - y_j \otimes y_i, \quad x^i \otimes y_j - y_j \otimes x^i + \mu \delta^i_j,$$
$$\mu \otimes x^i - x^i \otimes \mu, \quad \mu \otimes y_i - y_i \otimes \mu, \quad 1 \leq i, j \leq m$$

から生成される両側イデアルを R^{2m+1} とする．商空間 $H^{2m+1} = \mathcal{T}^{2m+1}/R^{2m+1}$ は結合代数であるが，そこでは R^{2m+1} に属する元は 0 として扱われる．H^{2m+1} に $\otimes$ から自然に誘導される積を $*$ で書くと，

$$\begin{aligned} &x_i * x_j = x_j * x_i, \quad y_i * y_j = y_j * y_i, \quad x_i * y_j - y_j * x_i = -\mu \delta_{ij}, \\ &\mu * x_i = x_i * \mu, \quad \mu * y_i = y_i * \mu, \quad 1 \leq i, j \leq m \end{aligned} \tag{2.19}$$

という関係式が成立している．H^{2m+1} を $\mu, x_1, \cdots, x_m, y_1, \cdots, y_m$ で生成されるハイゼンベルグ (Heisenberg) 代数と呼ぶ．さらに，μ を定数 $i\hbar$ のように扱ったもの（これは $\mu - i\hbar$ で生成される両側イデアルで商代数をつくるということである）を**ワイル代数**と呼んで W^{2m} と書く．しかし，この区別は μ をどのように見ているかだけの違いだからあまり厳格に区別されているわけではないし，人によっても呼び方が異なる．

---

7) 10.2.2 項でこの辺の話を関数係数で行なっている．

第 3 章　不確定性原理

前章では「観測」といっても観測によって得られる数値（またはその集団）をもって観測と考えてきた．可能観測全体の集合 $\mathcal{O}$ は図形的なものを考慮したとしても，自由に無限精度の観測ができると考えているので，「素朴な」観測論の枠内であり，$\mathcal{O}$ は目一杯広く考えてもある多様体上の外微分環であった．ここで，もう少し深く「観測という行為」について考えてみよう．

たとえば 2 点間の電位差を知ろうとすれば，その 2 点間に電圧計を入れる．電圧計はその計器を通して 2 点間にかすかに流れる電流を計測しそれを電圧という数値に直して表示するのである．電圧計というのは数値を得るために流さねばならない電流が少ない（内部抵抗が大きい）ほどよい電圧計なのだが，原理からいって内部抵抗を ∞ とすることはできない．電流や電圧を計測する，温度を測ろうとして温度計をつっこむ．水の流れの速さを知ろうとして流速計をつっこむ．これらはすべて対象に対する働きかけである．どんな観測でも対象へまったく何の影響も残さずに行なうことは不可能である

しかし，素朴に理想化された観測論では，この働きかけによる対象への影響は（工夫しだいで）限りなく小さくできると考えられている．

不確定性原理というのは上の考え方の一部を否定する原理である．つまり，位置と運動量とか，時間とエネルギー，とかといったような一般力学で正準共役の関係にあるとされている組についてはその両方を同時に無限に正確に観測することはできないとするもので，これが原理であるというのである．

門外漢にとっては，このように否定形で述べられたものの「原理」としての真意を理解するのはきわめて難しい．熱力学の第 2 法則も同様である．

加熱装置によってのみ仕事をし，その結果熱機関に与えられた全エネルギーを力学的仕事にのみ費やすような熱機関は存在しないというのが熱力学の第 2 法則．これの肯定形的な言い方は拙著 [27] 参照．

これをもう少し肯定形的な言い方に換えられないであろうか？　これがこの章の主題である．

3.1 運動学と観測

前の章で運動を扱ったが，それはものの動きの表現方法を考えただけで，力学としての運動を扱ったわけではなかった．この章では動力学としての運動を扱う．前章と違うところは**運動はすべてその運動に固有のハミルトン (Hamilton) 関数によって引き起こされる**と考えるところである．

観測というものは対象に対する働きかけである．われわれはこの働きかけに対する**状態のかすかな変化**を計測して数値を得ているのである．対象がまったく何の変化もしなければ観測値も得られない．これが観測というものの宿命である．量子論の立場はこの（微小な）働きかけも力学の原理に基づくものであるべきだと考えるところにある．

観測という行動までも運動学の中に含めてしまったとき，不確定性原理は積極的意味を持ち始めるのである．

3.1.1 ハミルトン系

まず，古典的一般力学系の考え方を述べよう．ここでは可能観測の全体 $\mathcal{O}$ は単なる可換代数ではなく，**相空間** (phase space) と呼ばれるある多様体 M 上の C^∞-関数よりなる可換代数であり，さらに**ポアソン** (Poisson) **括弧積**と呼ばれる $\mathcal{O} \times \mathcal{O}$ から $\mathcal{O}$ への双線形写像で，次の 3 つの性質を持つ積 $\{f, g\} \in \mathcal{O}$ が定

(1) $\{f, g\} = -\{g, f\}$
(2) $\{fg, h\} = \{f, h\}g + f\{g, h\}$
(3) $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$

義されているものとして考える：これを**ポアソン代数**と呼ぶが，力学系はすべて何らかのポアソン代数として与えられ，すべての運動，変化はそれに応じたハミルトン関数と呼ばれる関数 H によって引き起こされると考える．ポアソン**代数**と呼んではいるが結合律の成立する代数のことではないので要注意．

H は必ずしも $\mathcal{O}$ の元ではないが，$\forall f \in \mathcal{O}$ に対して $\{H, f\} \in \mathcal{O}$ が定義されており，次式が成立する（$\{H,\ \}$ が "微分" ということ）：

$$\{H, fg\} = \{H, f\}g + f\{H, g\}.$$

引き起こされる実際の運動は可能観測量の時間変化として記述され，

$$\partial_t f_t = \{H, f_t\}, \quad f_0 = f \in \mathcal{O} \tag{3.1}$$

という式として与えられる．f は時刻 0 における可能観測量を表す．

どんな運動であれ，およそ運動と名の付くものはすべてこのように記述される**べきだ**というのである（したがって，(3.1) 式は当然任意の初期関数 $f \in \mathcal{O}$ に対して解 f_t を持つ**べきだ**と考えられる）．

> ドグマチックなのは 19 世紀の数学の特徴の 1 つでもある．
> 20 世紀の拝点主義よりは哲学優先なのだが …….

何かハミルトン関数族 $\mathcal{H}$ という関数の族があって，どんな力学系もあるポアソン代数とあるハミルトン関数とで書かれており，運動はすべて $H \in \mathcal{H}$ によって引き起こされるのだという考え方である．

どうしてこのような考え方になったのかについてはたくさんの解説書があるからここでは触れないが，絶対者としての神の存在を強く意識させる変分原理の考え方と表裏一体のものである．このようなものを**ハミルトン系**と呼ぶ．

$\mathcal{O}$ は積で閉じていて可換代数になっているが，関数族 $\mathcal{H}$ はそこまでは要求されてはいないようである．どんなものがハミルトン関数になり得るかという決まりはないようだが，$H \in \mathcal{H}$ が与えられれば $X_H = \{H,\ \}$ は M 上の接ベクトル場となる．X_H を**ハミルトン・ベクトル場**と呼ぶ．

物理では常識的に X_H が完備ベクトル場となるハミルトン関数しか選ばれないようであるが，その大枠の決め方はないようである．

> X_H が完備でないハミルトン関数というのがあると，(3.1) 式は解くことができない．これは困ったことである．

そこで，物理を離れて数学的に最も都合の良い $\mathcal{H}$ というものを考えてみることにする．

まず $\mathcal{H}$ は線形空間をなし，かつ $\mathcal{O} \subset \mathcal{H}$ であるとしてよいであろう[1]．

すると次の (1), (2) の要請はきわめて自然なものに思える：

(1) $\mathcal{O} \subset \mathcal{H}$ であり，$\{\mathcal{H}, \mathcal{O}\} \subset \mathcal{O}$.

(2) $\forall f \in \mathcal{H}$ について X_f は完備ベクトル場であり，これが $\mathcal{O}$ の 1 径数同型群を生成する．

(1), (2) を満たす $(\mathcal{O}, \mathcal{H})$ を**数学的ハミルトン系**と呼んでおこう．しかし，次節で示すように，(1), (2) の条件はニュートン (Newton) 力学と完全に対立するのである．にもかかわらず，この条件は相対論を考慮したハミルトン系とは対立しないし，量子論ではむしろ自然な要請と思われているのである．

(3.1) 式の解き方

まず，(3.1) 式を詳しく考えよう．前章で述べたように運動の考え方は大きく分けて，「点の動き」と考えるか，「f の動き」と考えるかの 2 つがある．

「点の動き」と考えるときには座標関数の動きに限定して $\mathcal{O}$ の元を使う．したがって (3.1) 式は常微分方程式系として読まれる．これは，状態が M の局所座標系を使って $p = (x^1, x^2, \cdots, x^m)$ と表されていると考え，状態の i-番目の座標成分を表す関数 x^i を f として採用して考えるということである．$\{H, x^i\} = h^i(x^1, x^2, \cdots, x^m)$ とすれば (3.1) 式は

$$\frac{d}{dt}x^i(t) = h^i(x^1(t), x^2(t), \cdots, x^m(t)), \quad i = 1, \cdots, m \tag{3.2}$$

という常微分方程式系に変わる．これを初期点 p を与えて解くのである．

解の存在とか，初期点 p に関する一意性などはかなりわかっているので，初期点 p の解を $(x^1(t;p), \cdots, x^m(t;p))$ としておく．

---

1)　第 8 章では $\mathcal{H} = \mu^{-1}\mathcal{O}$ のようなものを使っている．

点の動きとして考えるといっても結局座標関数の動きを考えるのだから f の動きを考えるのと大差ないのだが，印象は違う．

f の動きと考えるときには X_H が完備ベクトル場でないといけないが，X_H が完備なハミルトン関数 H が与えられたとすると，それに応じて $\varphi_H(t) : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ という 1 径数自己同型群がある．$\varphi_H(t)$ を局所座標系を使って $\varphi_H(t)(p) = (x^1(t;p), \cdots, x^m(t;p))$ と表示しておけば，$\{H, x^i - x^i(p)\} = \{H, x^i\}$ および $f(\boldsymbol{x}) = f(p) + \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)(x^i - x^i(p)) + o(|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}(p)|^2)$ に注意すると

$$\{H, f\}(p) = \sum_i \{H, x^i\}(p) \frac{\partial f}{\partial x^i}(p)$$

がわかるから，これを使って

$$\frac{d}{dt} f(x^1(t;p), \cdots, x^m(t;p)) = \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} \{H, x^i\}(\boldsymbol{x}(t;p)) \right)$$
$$= \sum \left(\frac{\partial f}{\partial x^i} h^i \right) (\boldsymbol{x}(t;p)) = \sum \frac{\partial f}{\partial x^i}(\boldsymbol{x}(t;p)) \frac{dx^i(t;p)}{dt}$$

となり，$(x^1(t;p), \cdots, x^m(t;p))$ は常微分方程式 (3.2) を使って求めたものと一致し，結局

$$(\varphi_H(t) f)(p) = f(x^1(t;p), \cdots, x^m(t;p))$$

となることがわかる（(2.16) 式参照）．

3.1.2　ポアソン多様体, シンプレクティック多様体

C^∞-多様体 M 上の C^∞-関数全体を $C^\infty(M)$ として，$\mathcal{O} = C^\infty(M)$ に歪対称な括弧積 $\{f, h\}$ が定義されていてポアソン代数となっているような多様体を**ポアソン多様体**と呼ぶ．

ポアソン括弧積 $\{f, h\}$ は歪対称で $\{\ ,\ \} : C^\infty(M) \times C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ は f についても h についても微分の性質を持つので，**交代双微分**とも呼ばれる．これを $p \in M$ で考えると，$\{f, h\}(p)$ は

$$\{fg, h\}(p) = \{f, h\}(p)g(p) + f(p)\{g, h\}(p)$$

を満たすから h を固定すると $\{\cdot, h\}(p)$ は 2.1 節で見たように $p \in M$ における接ベクトルとなる．これは g を固定して $\{g, \cdot\}(p)$ についても同様である．上の

式より，$\{f,h\}(p)$ は $(df)(p),(dh)(p)$ にしか依存しない．T_p^*M を点 p における余接空間とすると $\{f,h\}(p)$ は $T_p^*M\times T_p^*M$ から $\mathbb{R}$ への交代双線形写像となる．これを $\{(df)_p,(dg)_p\}=\{f,g\}(p)$ と書く．

ポアソン括弧 $\{\,,\,\}$ は $\mathcal{X}_{\mathcal{O}}^*\times\mathcal{X}_{\mathcal{O}}^*$ から $\mathcal{O}$ への $\mathcal{O}$-双線形写像とも思えるわけである．線形空間としての T_p^*M の基底を $(dx^1)_p,\cdots,(dx^n)_p$ とし，

$$P^{ij}(p)=\{x^i,x^j\}(p)=\{(dx^i)_p,(dx^j)_p\},\quad 1\le i,j\le n$$

とする．(P^{ij}) は歪対称行列であるから前に述べたように固有値を考えれば階数 (rank) は偶数でなければならないが，一般に階数は点 p に依存する．

(P^{ij}) の階数がどこでも M の次元 $\dim M$ に等しいようなポアソン多様体を**シンプレクティック多様体**と呼ぶ．ここでは $\dim M$ は偶数であり，行列 (P^{ij}) は逆行列を持つ．この逆行列を (Ω_{ij}) とする．上の定義と 2.1.4 項で定義した $\mathcal{O}$-シンプレクティック多様体との関係は次のようになる．

補題 3.1　$\Omega=\sum\Omega_{ij}dx^i\wedge dx^j$ はシンプレクティック形式である．

証明　非退化性，$\mathcal{O}$-線形性は明らかだから，$d\Omega=0$ を示す．$\mathfrak{S}_{(i,j,k)}\partial_{x^i}\Omega_{jk}=0$ を示せばよい．**以下，総和に関してはアインシュタイン記法で書く**．つまり，上下に同じ文字があればそれについては 1 から n まで総和する．

$\Omega_{jl}P^{lk}=\delta_j^k$ を x^i で偏微分すると，$(\partial_{x^i}\Omega_{jl})P^{lk}+\Omega_{jl}(\partial_{x^i}P^{lk})=0$ だから，$P^{kb}=-P^{bk}$ より $\partial_{x^i}P^{jk}=P^{ja}P^{kb}(\partial_{x^i}\Omega_{ab})$ である．

一方 $\{\,,\,\}$ のヤコビ恒等式より，$\mathfrak{S}_{(i,j,k)}\{x^i,\{x^j,x^k\}\}=0$ だから，

$$\{x^i,f\}(p)=\{x^i,x^k-x^k(p)\}\partial_{x^k}f(p)=\{x^i,x^k\}\partial_{x^k}f(p)$$

に注意すると，

$$\mathfrak{S}_{(i,j,k)}\{x^i,P^{jk}\}=\mathfrak{S}_{(i,j,k)}\{x^i,x^l\}\partial_{x^l}P^{jk}=\mathfrak{S}_{(i,j,k)}P^{il}\partial_{x^l}P^{jk}=0$$

となるから，これに上の式を代入して $\mathfrak{S}_{(i,j,k)}P^{ia}P^{jb}P^{kc}\partial_{x^a}\Omega_{bc}=0$ となるが，総和するための添字は何に書き換えても意味は同じだから

$$P^{ia}P^{jb}P^{kc}\mathfrak{S}_{(a,b,c)}\partial_{x^a}\Omega_{bc}=\mathfrak{S}_{(i,j,k)}P^{ia}P^{jb}P^{kc}\partial_{x^a}\Omega_{bc}=0$$

となる．　（証明終わり）

【例 3.1】　最も身近なシンプレクティック多様体は，任意の多様体 N の余接束空間 T_N^* である．U を座標関数 $q^1,\cdots,q^n$ を持つ N の座標近傍とする．このとき

$U \times \mathbb{R}^n$ の点 $(q^1, \cdots, q^n, p_1, \cdots, p_n)$ を T^*U の点 $(q; \sum p_i dq^i)$, $q = (q^1, \cdots, q^n)$ の座標と考える．ポアソン括弧積はこの局所座標系を使って

$$\{f, g\} = \partial_{p_i} f \partial_{q^i} g - \partial_{p_i} g \partial_{q^i} f \quad \text{（アインシュタイン記法）}$$

で与えられる．この場合は $\Omega = dp_i \wedge dq^i$ である．余接束空間 T_N^* はたんに**余接束** (cotangent bundle) とも呼ばれる．

3.1.3　ニュートン力学と相対論的ハミルトニアン

ニュートンの運動法則は数学的ハミルトン系としてはほとんど書けないことを示そう．いうまでもなく，ニュートンの運動法則は余接束 T_N^* 上に自然に定義されるポアソン代数と，ハミルトン関数 $H(x;p) = \frac{1}{2}\langle p, p\rangle + V(x)$ で書かれる．$V(x)$ はポテンシャル関数と呼ばれる N 上の関数であるが，数学的には何の制限もなく，どんな C^∞-関数でもポテンシャル関数になり得ると考えていてよい．問題点を明確にするために以下では多様体 N はコンパクトで境界はなく $\partial N = \emptyset$ とする．実は以下のような奇妙なことが起こる．

補題 3.2　$\mathcal{H} \subset C^\infty(T_N^*)$ であるような数学的ハミルトン系 $(\mathcal{H}, \mathcal{O})$ においては，$\forall f \in \mathcal{O} \cap C^\infty(N)$ について，これがどこかで 2 階の微分まで 0 となると，その点では f のすべての微分が消えなければならない．

証明　（概略）$f \in \mathcal{O} \cap C^\infty(N)$ で，これがある点 $q \in N$ で $k{-}1$ 階までの微分は 0 であるが，k 階 $(k \geq 3)$ 偏微分係数のどれかが q で 0 でないとしよう．条件 (1) より $W = \{H, \{H, \{\cdots \{H, f\}\}\}\} \in \mathcal{O}$ （$k{-}1$ 回）であるから，これをもとにしてハミルトン・ベクトル場 X_W を q を原点とする測地座標系で計算すると，X_W は余接ベクトル空間 T_q^*N に接しており，T_q^*N に制限した $X_W|_{T_q^*N}$ は

$$X_W|_{T_q^*N} = \sum \frac{\partial^k f}{\partial_{q^{i_1}} \cdots \partial_{q^{i_k}}}(0) p_{i_1} \cdots p_{i_{k-1}} \partial_{p^{i_k}}$$

の形になる（[22], pp.192–193 参照）．$k \geq 3$ としているからこれは T_q^*N 上では 2 次式以上の関数を係数とする接ベクトル場である．実はこのようなものは完備ベクトル場ではない．これを見るには，$\sum (p_i)^2 = 1$ の条件下で

$$\frac{\partial^k f}{\partial_{q^{i_1}} \cdots \partial_{q^{i_k}}}(0) p_{i_1} \cdots p_{i_k}$$

が最大になる方向 ξ をとる．すると，座標系をうまく回転させて $\xi=(1,0,\cdots,0)$ としてよいが，この座標系に取り直して計算し直すと，X_W は 1 次元の部分多様体 $(t,0,\cdots,0)$ に接している $at^{k-1}\partial_t$ のように書かれるベクトル場であることがわかる．これは完備でなく，(2) の条件に反する．（証明終わり）

結論としてポテンシャル関数として選べるものが有限次元分しか存在しなくなるのである．この理由をよく見ると，これはニュートン力学のハミルトン関数 H が p に関して 2 次式だということが原因であることがわかる．

> 古典力学はさっそうと登場したけれども，よく見るとそちこちに論理的破れがあるのである．

ところが，面白いことに相対論を考慮した力学ではこのようなことは起きないのである．

一般相対論では，万有引力（重力場）は時空多様体上にローレンツ計量と称する計量の形で組み込まれていて，万有引力のみを受けて運動する物体はこの計量に関する測地線の方程式 (2.18) を満たす運動（自由落下）だとされている．ただし，時空多様体上では文字 t を座標関数として使う習慣があるので，前に測地線の方程式を書くときに使った t に相当するパラメーターとしては τ を用いることにする．

時空多様体が $\mathbb{R}\times N$ のような直積多様体で，そこにローレンツ計量が

$$ds^2=c(t,\boldsymbol{q})^2dt^2-h_{ij}(t,\boldsymbol{q})dq^idq^j,\quad (h_{ij})\text{ は正定値行列} \tag{3.3}$$

のように与えられている場合には，上の自由落下運動は t 依存型のハミルトン関数を使えば N 上のハミルトン系と思えるのである．

ハミルトン関数は，(3.3) 式の中の正定値行列 $ds^2=h_{ij}dq^idq^j$ を使って

$$H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})=c(t,\boldsymbol{q})\sqrt{1+h^{ij}(t,\boldsymbol{q})p_ip_j},\quad c(t,\boldsymbol{q})\text{ は光速} \tag{3.4}$$

で与えられる[2)]．h^{ij} は (h_{ij}) の逆行列の成分である．この場合 h_{ij} は各 t で N 上のリーマン計量になっているものなら何でもよい．

N の余接束を T^*_N，点 $q\in N$ の余接ベクトル空間を T^*_qN とし，この中で，原点中心の単位開球体を D^n_q とする．$q\in N$ を動かして $D^n_N=\bigcup_{q\in N}D^n_q$ は

2) この部分の導き方は拙著 [27] II,§5 参照．

T^*_N と可微分同相であるが，これの閉包 $\overline{D}^n_N$ を考えると，N がコンパクトであるから，$\overline{D}^n_N$ もコンパクトである．感覚的には無限遠方に S^{n-1} 球束 S^*_N を張り付けてコンパクト化した境界付きの多様体と思ってよい．その意味でこれを $\overline{T}^*_N$ と書く．さらに $\mathcal{O} = C^\infty(\overline{T}^*_N)$ とする．これは $\overline{D}^n_N$ 上の C^∞-関数全体という意味である．

$r^2 = h^{ij}p_ip_j$ とおき，$G = \frac{1}{r^2}h^{ij}p_ip_j$ とすれば G は $\boldsymbol{p}$ に関して 0-次同時関数だから S^*_N 上の C^∞-関数と思える．これを使うと

$$H(\boldsymbol{q},\boldsymbol{p}) = rc(t,\boldsymbol{q})\sqrt{G}\sqrt{1+\frac{1}{Gr^2}}$$

と書かれるから，$\sqrt{1+\frac{1}{Gr^2}}$ を $r^{-2}=0$ のところでマクローリン (Maclaurin) 展開して考えれば

$$\mathcal{H} = rC^\infty(S^*_N)\oplus\mathcal{O}, \quad \mathcal{O} = C^\infty(S^*_N)\oplus r^{-1}\mathcal{O}$$

がわかる (後節参照)．特徴はニュートン力学のハミルトン関数 H が r について 2 次式であるのに対し，上の $\mathcal{H}$ の元はすべて r については 1 次式以下であるということである．このことが効いて $(\mathcal{H},\mathcal{O})$ は数学的ハミルトン系になるのである[3]．**相対論のほうがニュートン力学より数学的には閉じている**といえるだろう (そして量子論では数学的に閉じることが理論をつくるときの指標になっている)．

3.2 正準共役量と不確定性

まず正準共役量とか，正準共役関係と呼ばれるものを定義しよう．そのためにダルブー (Darboux) の定理から始める．

定理 3.1 (ダルブーの定理) シンプレクティック多様体 M では，任意の点の近傍で，座標関数 $x^1,\cdots,x^n,y_1,\cdots,y_n$ で

$$\{x^i,y_j\}=\delta^i_j, \quad \{x^i,x^j\}=0=\{y_i,y_j\}$$

となるようなものがとれる．

3) このように時間 (共通時間) τ に依存したハミルトニアンを使ったときの運動方程式の書き方については 3.3 節参照.

もっと一般にポアソン多様体 M では点 p で $\{,\}(p)$ の階数が $2m$ ならば p を原点とする p の近傍の座標関数 $x^1,\cdots,x^m,y_1,\cdots,y_m,z_1,\cdots,z_r$, $2m+r=n$ で

$$\{x^i,y_j\}=\delta^i_j,\quad \{x^i,x^j\}=\{y_i,y_j\},\quad \{z_i,x^j\}=\{z_i,y_j\}=0,$$
$$\{z_i,z^j\}=\varphi_{ij}(z),\quad \varphi_{ij}(0)=0$$

となるようなものがとれる．

$\varphi_{ij}(z)$ は $z_1,\cdots,z_r$ だけの関数になっているが，p 以外のところでは一般には $\varphi_{ij}(z)\neq 0$ である．しかし $q(\neq p)$ で $\{z_i,z^j\}(q)\neq 0$ となったとすると，$\{,\}(q)$ の階数が $\geq 2(m+1)$ とならなければならない．

したがって，p の近傍上で $\{,\}$ の階数が一定 $(2m)$ ならば p の近傍上で $\{z_i,z^j\}=0$ であることが結論される．

上のような局所座標系を**局所ダルブー系**と呼ぶ．局所ダルブー系のとりかたは一意的ではない．x^i , y_i をそれぞれ y_i , x^i の**正準共役量**（または正準共役変数）という．しかし，変数 z_i の正準共役量というのはない．

3.2.1 不確定性

観測というのは (3.1) 式を解くことではなく，何かの観測手段を通して微小変化 $(\exp\delta X_H)(p)$ に数値 $\tilde{\omega}_p(X_H)$ を対応させる対応のことである．つまり，状態 p に観測 X_H を行なうと状態は p から $(\exp\delta X_H)(p)$ に変化する（δ は極微小）のだが，鋭敏な計測器はその微小変化を拡大して数値にしているのだから，数値としては $\frac{1}{\delta}(\tilde{\omega}_p(\exp\delta X_H)-\tilde{\omega}_p(\exp 0X_H))$ を応答していると考え，それを理想化して次式を観測値と考えるのである：

$$\tilde{\omega}(X_H)(p)=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tilde{\omega}(\exp tX_H)(p)\ \text{（状態 p に観測 X_H を行なったときの観測値）}. \tag{3.5}$$

この場合 $\tilde{\omega}$ は（何を観測するかを決める）**観測手段**のように考えるとよい．

この辺まできて観測という行為まで考察の対象にできる．

$H\in\mathcal{H}$（3.1.1 項参照）を決めたとき，$f\to\{H,f\}$ は $\mathcal{O}$ の微分だから無限小自己同型と考えて X_H と書く．H によって状態 $p\in M$ は dt 時間に p から $X_H(p)dt$ だけ動くと考えるのである．これを有限時間まで追跡するには (3.1) 式を解けば（積分すれば）よいわけである．

$\mathfrak{g}_{\mathcal{H}} = \{X_H; H \in \mathcal{H}\}$ とする．$X_H f = \{H, f\}$ だから

$$[X_H, X_{H'}]f = X_H X_{H'} f - X_{H'} X_H f$$
$$= \{H, \{H', f\}\} - \{H', \{H, f\}\} = X_{\{H,H'\}} f$$

となり，$\mathfrak{g}_{\mathcal{H}}$ はリー代数をなすと考えてよいだろう[4]．

何かを観測するにはそれ用のハミルトン関数 $H \in \mathcal{H}$ を選んで（微かではあるが）状態に変化を生じさせなければならない．われわれは状態の微かな変化（理想化して無限小の変化）を計測して数値（観測値）を得ているのである．計測して数値に直すやり方は無数に考えられる．ここの部分が $\tilde{\omega}$ として与えられているのだと考えるわけである．

> H を変えることで運動はコントロールできるかもしれないが，われわれは手を下して直接，運動をコントロールすることはできない．

ハミルトン関数をいろいろに動かしたときの状態の無限小変化の全体

$$\left\{ \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} (\exp tX_H)(p); X_H \in \mathfrak{g}_{\mathcal{H}} \right\}$$

（数学では集合を定義するとき，条件 B を満たす A の全体を表す記号として $\{A; B\}$ を用いる．）

はいわば状態 p が（さまざまなハミルトン関数によって）変位するときの，無限小変位の全体で，状態の空間 M の p における接空間 T_pM を表している．$\tilde{\omega}_p$ は T_pM から $\mathbb{R}$ への線形写像 $\tilde{\omega}_p : T_pM \to \mathbb{R}$ と考えられる．これは p を動かして考えれば M 上の 1 次微分形式ということであるが，観測なるものもある程度理想化して考えて，単なる 1 次微分形式ではなく，$\tilde{\omega}$ は線形写像 $\tilde{\omega} : \mathfrak{g}_{\mathcal{H}} \to \mathcal{O}$ で各 $p \in M$ で

$$\tilde{\omega}_p(\{X_H \in \mathfrak{g}_{\mathcal{H}}; X_H(p) = 0\}) = \{0\}$$

（p で消える X_H では観測値も消える）

となるものと考えることにする．

そして観測 X_H を行なった直後に同じ対象に観測 $X_{H'}$ を行なうということは $(\exp \delta X_H)(p)$ に変化してしまった状態を観測するのだから，観測値は（これを“積”と考えて $(\tilde{\omega}(X_{H'}) * \tilde{\omega}(X_H))(p)$ と書くことにして）

$$(\tilde{\omega}(X_{H'}) * \tilde{\omega}(X_H))(p) = \frac{d}{dt'}\bigg|_{t'=0} \frac{d}{dt}\bigg|_{t=0} \tilde{\omega}(\exp t' X_{H'} \circ \exp tX_H)(p)$$

4) $\mathfrak{g}_{\mathcal{H}}$ が汎リー群（第 12 章参照）のリー環となっている場合を想定するのが実際的であろう．

であると考えられる[5]．$\circ$ は写像の合成の意味である．

これに対し，$a, b \in \mathbb{R}$ として，$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tilde{\omega}(\exp t(aX_H + bX_{H'}))(p)$ は線形結合 $aX_H + bX_{H'}$ という観測をしているのであって，観測 X_H を行なった直後に観測 $X_{H'}$ を行なっているのではないと考える．$\tilde{\omega}$ は線形と仮定したから，

$$\tilde{\omega}(aX_H + bX_{H'})(p) = a\tilde{\omega}(X_H) + b\tilde{\omega}(X_{H'})(p)$$

である．$(\tilde{\omega}(X_{H'}) * \tilde{\omega}(X_H))(p)$ のほうは展開して，tt' の項を取り出せばよいから次のようになる：

$$\frac{d}{dt'}\Big|_{t'=0}\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\tilde{\omega}(\exp t'X_{H'} \circ \exp tX_H)(p) = \tilde{\omega}(X_{H'}X_H)(p).$$

右辺の $\tilde{\omega}(X_{H'}X_H)(p)$ は数学的には意味不明だから，意味がとれるように[6]するために $(\tilde{\omega}(X_{H'}) * \tilde{\omega}(X_H))(p)$ と $(\tilde{\omega}(X_H) * \tilde{\omega}(X_{H'}))(p)$ の差を見ることにすると次のようになる：

$$\begin{aligned}(\tilde{\omega}(X_{H'}) * \tilde{\omega}(X_H))(p) - (\tilde{\omega}(X_H) * \tilde{\omega}(X_{H'}))(p) \\ = \tilde{\omega}([X_{H'}, X_H])(p) = \tilde{\omega}(X_{\{H', H\}})(p).\end{aligned} \tag{3.6}$$

つまり，不確定性原理が教えることは観測値の集団がつくる代数は積 $*$ に関してはどんなに理想化しても非可換代数にしかならないというだけでなく，観測を立て続けに行なって得られる代数は (3.6) 式のような式で $\mathfrak{g}_{\mathcal{H}}$ と結び付いている代数（$\mathfrak{g}_{\mathcal{H}}$ の普遍展開環（9.3 節参照）の準同型像）にもなっているといっているのである．これは「観測というものも力学の原理にしたがっている」という原則を認める限りそうなるわけである．観測というものまでこのように力学の中に組み入れて考えると，正準共役関係にある量を同時に無限に正確に観測することが不可能になる理由はわかるだろう．

確かに観測することで状態は乱される．しかしすべて乱されるわけではない．乱されるものが上のようになっていると，$[X_H, X_{H'}] = 0$ だと $\mathrm{Ad}(\exp \xi u)(v) = v$ である．この場合は乱された後の v-観測 $\omega(v)(\mathrm{Ad}^*(\exp \xi u)(s))$ は乱される前の $\omega(v)(s)$ と一致する．

---

5) この部分は数学的でも何でもない．ただの仮設である．

6) 多くの物理の教科書はここの部分でもっと物理的に精密な論議をしているが，それらは数学的には定式化しにくい．

しかし，この考えでは正準共役関係にある量についてはそうであるが，$[u_i, u_j] = 0$ であるような $u_1, \cdots, u_n$ については無限に正確に観測することが可能としておいてよいように見える．

だがこの説明はいろいろな自己矛盾を含んでいる．まず，$\mathcal{O}$ はあらかじめ可換代数として与えられているものとして話を始めている．しかし $\mathcal{O}$ はもともと「任意の 2 つの観測は同時に無限に正確に行なえる」としてそれを前提にしてつくった可換関数環であった．ここにポアソン括弧という積を持ち込んで，運動をある相空間上の常微分方程式系として書こうとしてきたわけである．

しかし，不確定性原理は「状態の相空間内での位置を確定できない」といっているのであるから，こういうものの変化を表す常微分方程式など立てようがないといっていることにもなる．**意味のとりようによっては，不確定性原理は古典力学全否定の原理なのである．**不確定性原理を認めると古典的運動はそれを書くべき場所（相空間）を失って，空中分解してしまうのである．

しかも，前のダルブーの定理でわかるように，完全な正準共役量などは局所的にしかつくれないものだったわけで，さらにいえば「局所」とかそうでないとかということも観測することでいうのだとすると，これを先に持ち出すのは論理的におかしいから，配位空間を構成する可能観測量といえども非可換であると考えるほうが自然になってくるのである．

不確定性

不確定性原理は古典力学系がいう相空間を多様体として考えてはいけないと言っているのである．すると，どこに運動を表す常微分方程式を書けばよいのだろう．ギリシャ時代のパラドックスは本当に解消されたのだろうか？

一般力学系では始めは観測というところまでは考えないから，$\mathcal{O}$ がポアソン括弧積を持っているということは何の違和感も生まないだろうが，観測という行為まで力学の枠内で考え，不確定性を認めると，$\mathcal{O}$ でつくる点集合（相空間）を否定しなければならなくなるのである．

しかし，否定のしっぱなしでは話は建設的に進まない．相空間を失ってしまったので何か別のところを土台にして量子論的力学は書かれるべきだということになるが，これに対する考え方 としては次で述べるようにハイゼンベルグによるものと，シュレーディンガー (Schrödinger) によるものとがある．

3.2.2 ハイゼンベルグの危機回避策

ハイゼンベルグの考え方はかなり根本的変革を要求していて，可能観測全体の代数 $\mathcal{O}$ をどこかの線形空間に働く演算子からなる（非可換な）代数とし，ポアソン構造にあたるものを，ここに入る交換子 $[\,,\,]$ で与えられるものと考える．このような枠組で古典力学に似せて代数を再構成して理解せよというもので，考え方の大幅な変更が求められる．このようにしなければ不確定性原理を組み込んだ理論にならないと考えるわけである．この考え方は後で述べる変形量子化の考え方（4.3.3 項参照）に近いがそれよりはるかに強いことを要求していて，可能観測を構成する演算子，とくにハミルトニアンはすべてあるヒルベルト (Hilbert) 空間（4.1.1 項参照）の自己共役作用素であることまで要求されている．

> 古典的相空間を否定して，それでもそれと同じようなものをつくろうとすると作用素解析学が意味を持ち始めるのである．

これは次の理由による．まず H をハミルトニアンとしよう．すると $S \in \mathcal{O}$ の時間発展は作用素どうしの関係を与える微分方程式

$$\frac{d}{dt}S_t = \frac{i}{\hbar}[H, S_t], \quad S_0 = S \tag{3.7}$$

で与えられる（とされている）．$\hbar$ は正の定数である．この場合 S_t も H も $\mathbb{C}$ 係数のあるヒルベルト空間 E 上の作用素であり，$[A, B] = AB - BA$ である．しかし，これが時間発展を与える式だというのならば，この微分方程式が解けなくてはなるまい．

> **定義と解釈**
>
> 有界作用素の場合は対称作用素と自己共役作用素とは同じ意味である．非有界の場合の定義を与えていないが，次の定理を定義と解釈してよい．

ところで関数解析にストーン (Stone) の定理と呼ばれる次の定理がある．

定理 3.2（**ストーンの定理**）　ヒルベルト空間 E 上のユニタリ作用素の 1 径数群 U_t は，稠密な部分空間 $D \subset E$ で定義された自己共役作用素 $H : D \to E$ を使って，$U_t = e^{itH}$ と書かれる．逆に自己共役作用素 $H : D \to E$ は H 上のユニタリ作用素の 1 径数群 e^{itH} を生成する．

e^{itH} は方程式 $\frac{d}{dt}f_t = iHf_t$ の基本解で，$\forall f \in E$ を初期値とする解を与えるものである．つまり $\frac{d}{dt}e^{itH}f = iHe^{itH}f$ である．

$e^{t\frac{i}{\hbar}H}$ が与えられれば (3.7) 式の解は $S_t = e^{t\frac{i}{\hbar}H}Se^{-t\frac{i}{\hbar}H}$ で与えられる．計算は次のようになる：

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}e^{t\frac{i}{\hbar}H}Se^{-t\frac{i}{\hbar}H} =& \frac{i}{\hbar}He^{t\frac{i}{\hbar}H}Se^{-t\frac{i}{\hbar}H} - e^{t\frac{i}{\hbar}H}Se^{-t\frac{i}{\hbar}H}\frac{i}{\hbar}H \\ =& \frac{i}{\hbar}[H, e^{t\frac{i}{\hbar}H}Se^{-t\frac{i}{\hbar}H}].\end{aligned}$$

$e^{t\frac{i}{\hbar}H}Se^{-t\frac{i}{\hbar}H}$ は $\mathrm{Ad}(e^{t\frac{i}{\hbar}H})S$ とか，$e^{t\mathrm{ad}(\frac{i}{\hbar}H)}S$ と書かれる．

可能観測が時間発展したものも可能観測，つまり $\forall S \in \mathcal{O}$ に対して $\mathrm{Ad}(e^{t\frac{i}{\hbar}H})S \in \mathcal{O}$ と考えるべきだ[7]から，これより $\mathrm{Ad}(e^{t\frac{i}{\hbar}H}) : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ という代数同型の 1 径数群が得られる．これを t で微分すれば代数 $\mathcal{O}$ の微分

$$XS = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(e^{t\frac{i}{\hbar}H})(S) = \left[\frac{i}{\hbar}H, S\right]$$

が得られる．X を $\mathrm{ad}(\frac{i}{\hbar}H)$ と書くが，これは古典的には相空間上のベクトル場と解釈されていたものである．すると，X は (1 径数群を生成しているのだから) 完備ベクトル場と解釈しなければならなくなるわけである．

この場合なぜ (3.7) 式が解けるだけでは満足せず e^{itH} の存在まで要求するのか**数学的理由ははっきりしない**．$\mathrm{Ad}(e^{t\frac{i}{\hbar}H})$ は $\mathcal{O}$ 上の作用素として，いわば e^{tX} を書いたもので，H と同列の作用素にはなっていないが H でなく $\mathrm{ad}(\frac{i}{\hbar}H)$ が与えられたと思ってしまってつくる理論はなぜ不十分なのかはっきりしないのである．しかし，$\mathrm{Ad}(e^{\frac{i}{\hbar}H}) = \mathrm{Ad}(-e^{\frac{i}{\hbar}H})$ であるから，随伴形式だけで良しとすると $\pm$ の情報を失ってしまうことは確かである[8]．

ハイゼンベルグ流の考え方だと，古典的なものを先に持ってきてそれを自己共役性まで考慮しながら量子化するという処方箋はつくりにくいから，初めから量子化されているとみなされるような対象（非可換代数）を数学の中から探してきておいて，それが何の量子化になっているかを考えるという方向になる．

たとえば (3.7) 式は有限次の行列の中ならばきわめてわかりやすい形をしている．4.2 節で詳しく述べるが，これは行列表現された任意のリー群のリー環上で書かれた式のようにも読めるのである．しかも (3.7) 式だけならば任意のリー群上で書くことができるのである．

---

7) これは数学的には仮定である．

8) 後でこの部分が曖昧群という考え方を要求することがわかる（定理 11.4 参照）．

リー群

群であり同時に C^∞-多様体にもなっていて群の演算がすべて微分可能となっているものを**リー群**と呼ぶ．ここでは群の計算に微積分が使える．

G をリー群とし，$\mathfrak{g}$ を単位元 e における G の接空間とすると $\mathfrak{g}$ は自然にリー代数となる．これを G のリー環と呼ぶ．

(3.7) 式は $\frac{1}{\hbar i}H, A(t) \in \mathfrak{g}$ に対して書かれた式のようにも読めるわけで，この場合は $e^{\frac{it}{\hbar}H}$ は $\frac{1}{\hbar i}H$ を無限小生成元とする G の 1 径数部分群となる．

するとこれも量子論的に解釈できるのであろうか？　いったいこれはどのような古典力学を量子化したものと考えられるのだろうか？　有限次元の行列でやっている限り $\frac{1}{\hbar i}[X,Y] = I$（単位行列）といった正準共役対が見つからないことは両辺の跡 (trace) をとって考えてみればすぐにわかるので，対応する古典力学が見えにくいことは理解してもらえると思う．しかし，この問題をめぐってリー群の表現論（ユニタリ表現論）が進んだことも確かである．

3.2.3　シュレーディンガーの危機回避策

これに対し，不確定性原理により相空間は否定されたが，配位空間まで否定されているわけではないと考えるのがシュレーディンガーの考えである．相空間は $(q^1,\cdots,q^n,p_1,\cdots,p_n)$ の空間であったが，配位空間とは $(q^1,\cdots,q^n)$ だけの空間，つまりわれわれが普通に見ている物体が入っている空間のことである．上で述べた不確定性は位置 q と運動量 p のような正準共役量を同時に正確には決められないとしているだけで，位置 q だけならば $\{q^i, q^j\} = 0$ だから無限に正確に観測できるとしてよいであろう．

シュレーディンガーは $\{q^i, p_j\} = \delta^i_j$ と $[q^i, \partial_{q^j}] = \delta^i_j$ との類似性に注目して古典力学で p_i と書いてあるところを $\hbar i \partial_{q^i}$ に置き換えることで一応切り抜ける方法を考えた．このような置き換えによって得られる微分作用素を**シュレーディンガー作用素**と呼ぶ．

数学へのゆりもどし

すると，これまで相空間のベクトル場と思っていたものは，偏微分作用素 $\hat{H}$ を古典的に眺めたものだということになる．これはいったいどのような関係になっているのだろうか？　この問題をめぐって数学，とくに偏微分方程式論が 20 世紀にかなり進んだことは確かだが，物理のほうに衝撃を与えるような進歩ではなかった．それはそのはずで，問題の設定自身が物理の下請け的になっているからである．

これは古典力学で $H = \sum f_k(\boldsymbol{q})p^k$ と書かれているハミルトン関数があったら，これを $\hat{H} = \sum \hbar i f_k(\boldsymbol{q})\partial_{q^k}$ という演算子と思うことにしようというものであるから，ハイゼンベルグのやり方より古典力学との対応ははっきり見えている．しかし $H = \sum g_{kl}(\boldsymbol{q})p^k p^l$ のようなものは $\hat{H} = -\sum \hbar^2 g_{kl}(\boldsymbol{q})\partial_{q^k}\partial_{q^l}$ のような 2 階の微分作用素に置き換えて話をしなければならなくなるわけである．それと同時に自己共役性をどのようにして保証するかという**やっかいな問題を抱え込む**わけである．

順序付問題 (ordering problem)

古典的ハミルトン系はかなり自由に相空間を考えていたのに対し，シュレーディンガーの理論は配位空間 N が最優先で与えられないと話が始まらないしかけになっている．危機回避できているのは古典ハミルトン系のごく一部にすぎない．しかも，シュレーディンガー作用素のつくり方には次のような不定性があることに注目してもらいたい．たとえば p^2q^2 のように書かれる T_N^* 上の関数は $q^2p^2 = qpqp = p^2q^2$ のようにいろいろな書き方ができる．するとシュレーディンガー作用素としては

$$f \to -q^2\hbar^2\partial_q^2 f, \quad f \to -\hbar^2 q\partial_q(q\partial_q f), \quad f \to -\hbar^2(\partial_q^2 q^2 f)$$

のようにいろいろなものが得られるわけで，決まったつくり方がない．これは困ったことだから何か一定のつくり方を探そうとした時代もあるが，すべての人が認めるようなうまいものは見つからなかった．

古典的相空間ではたとえば $(1+\sum p_i^2)^{-1}$ のような関数も自由に扱えるのだが，シュレーディンガー作用素のつくり方でこれにはどのような作用素を対応させればよいだろうか？　これと $1-\hbar^2\sum \partial_{q^i}^2$ とはどのような関係にあるのだろうか？

まず**古典力学があって，それを量子化する**という立場ではなく，ハイゼンベ

ルグのように**量子論的世界がまず在る**と考えると順序付の問題はたんに表示法の問題ということになるであろう．この考え方は後のほう（5.2.2 項参照）で述べるが，順序付の問題を problem と理解するのは，まだ古典的世界から物事を理解しようとする発想なのである．（演算子でできた）非可換な代数が先にあると思えば，それが古典的には縮退した形で現れていると考えるのはむしろ自然であろう．

シュレーディンガーによる危機回避策によって相空間上の常微分方程式は配位空間上の偏微分方程式に置き換わったのだが，その関係をよく見れば，**偏微分作用素の自己共役性と，常微分方程式のときのベクトル場の完備性は表裏一体のものであると理解できるであろう．**

3.3　時間とエネルギーの共役性

例 3.1 でわかるように位置と運動量は正準共役である．これだけでなく，物理では時間とエネルギーも正準共役とされている．

これは時間に依存するハミルトン関数を考えるとき，時間をたんにパラメーターとするのではなく，時間変数も座標関数のように思って系を組み直すと，これらのものを含むようにポアソン代数が構成できるからである．

前の 3.1.3 項でも相対論的な運動をハミルトン系として考えるために t に依存するハミルトン関数 $H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ を考えた（(3.4) 式参照）．このような $\mathbb{R} \times T^*_N$ 上の関数をハミルトン関数とする運動は次のようになるとされている：

まず，$\dim N = n$ とし，運動は $\mathbb{R} \times T^*_N$ 上のあるベクトル場

$$X_H = T\partial_t + \sum_i (Q^i \partial_{q^i} + P_i \partial_{p_i})$$

の積分曲線で与えられるとする．積分曲線をパラメーター表示するのでそのためのパラメーターを τ とする．X_H が上のように与えられたときには積分曲線を決める式は次の常微分方程式系である：

$$\frac{dt}{d\tau} = T(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \quad \frac{dq^i}{d\tau} = Q^i(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}), \quad \frac{dp_i}{d\tau} = P_i(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p}). \tag{3.8}$$

だから，X_H の決め方を与えればよい．

$\omega = H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})dt - \sum p_i dq^i$ という 1 次微分形式を考え，外微分して $d\omega = dH \wedge dt + \sum dq^i \wedge dp_i$ をつくる．次元が奇数だから $d\omega$ はシンプレクティック形

式になるはずもないが，これを $\Omega = dE \wedge dt + \sum dq^i \wedge dp_i$ という“シンプレクティック形式”を $E = H(t, \boldsymbol{q}, \boldsymbol{p})$ のところに**制限した姿だと考える**のである．ω は**接触形式** (contact form) と呼ばれる．

時間とエネルギーが正準共役とされるのは上のように考えるからであるが，これは E も時空から独立した変数と見ているということだから E も t も独立変数として組み込まれた相空間があるとしなければならない．

$d\omega$ の（行列としての）階数は $2n$ でこれを $(2n+1)$-次元の中で考えているのだから，$\forall Y = \dot{t}\partial_t + \dot{q}^i \partial_{q^i} + \dot{p}_j \partial_{p_j}$ に対して $d\omega(X_H, Y) = 0$ となる $X_H (\neq 0)$ はスカラー倍の不定性を含んで唯一つ存在する．これを求める：

$$dH \wedge dt(\dot{t}\partial_t, Z) = \dot{t}(\partial_t H)dt(Z) - dH(Z)\dot{t}$$

などに注意して計算すれば （何でもないように見えるが，パラメーターと思っていたものを座標関数に組み込んで考えるのは，発想の大きな転換である．いったいどこまでがパラメーターなのだろうか？）

$$\begin{aligned} d\omega(X_H, Y) =& (dH - \partial_t H dt)(X_H)\dot{t} \\ &+ (dp_i + \partial_{q^i} H dt)(X_H)\dot{q}^i - (dq^j - \partial_{p_j} H dt)(X_H)\dot{p}_j = 0 \end{aligned}$$

となり，これは $\dot{t}, \dot{q}^i, \dot{p}_j$ が任意だから

$$\begin{aligned} (dH - \partial_t H dt)(X_H) = 0, \quad & (dp_i + \partial_{q^i} H dt)(X_H) = 0, \\ & (dq^j - \partial_{p_j} H dt)(X_H) = 0 \end{aligned}$$

となるような X_H のことである．スカラー倍の不定性は $T = \frac{dt}{d\tau}$ を（勝手に）決めてしまえば消える．これを (3.8) 式のレベルで書けば

$$\begin{cases} \dfrac{dt}{d\tau} = T, \\ \dfrac{dq^i}{d\tau} - (\partial_{p_i} H)T = 0, \\ \dfrac{dp_i}{d\tau} + (\partial_{q^i} H)T = 0, \\ (\partial_{q^i} H)\dfrac{dq^i}{d\tau} + (\partial_{p_i} H)\dfrac{dp_i}{d\tau} = 0 \quad \text{（アインシュタイン記法）} \end{cases} \tag{3.9}$$

となる．第 4 の式は（t を含む）エネルギー等式で上の 3 つの式から出てくる．

> 上の式を書いたのはカルタン (Cartan) であるが，アインシュタインの相対論を意識して（ほとんど等価のものとして）書かれているように思われる．

$\frac{dt}{d\tau}=1$ の場合はおなじみの式であろうが，$\neq 1$ のときに T の自由性はどう解釈すればよいのか一般には不明である．τ は曲線を表すパラメーターにすぎないから数学的には何をとってもよいのだが，一般相対論では (3.3) 式で与えられた計量に関する測地線の方程式が，(3.4) 式でハミルトン関数を与えたときの (3.9) 式と一致するように T が選ばれていて，τ は観測者にとっての時間 (proper time) と解釈されている．

この本では触れないが，場の方程式の理解の助けになるので上の式を変分法的に理解しておこう．曲線 $c(\tau)=(t(\tau),\boldsymbol{q}(\tau),\boldsymbol{p}(\tau)), 0\leq\tau\leq 1$ に沿って 1 次微分形式 $\omega=H(t,\boldsymbol{q},\boldsymbol{p})dt-\sum p_i dq^i$ の線積分

$$L(c)=\int_0^1\Big(H(t(\tau),\boldsymbol{q}(\tau),\boldsymbol{p}(\tau))\frac{dt}{d\tau}-\sum p_i(\tau)\frac{dq^i}{d\tau}\Big)d\tau$$

を考える．L を c の関数と考えたとき L が極値（もっと広く停留）となる点 c を求めることを考えよう．つまり両端を固定したままの変分で $\delta L(c)=0$ となる曲線 c を求めることを考えよう．

両端を固定したまま曲線をパラメーター s 付きで（C^∞-級に）動かして $c_s(\tau)=(t(\tau,s),\boldsymbol{q}(\tau,s),\boldsymbol{p}(\tau,s))$ とし，$c_0(\tau)=c(\tau)$ とする．$s=0$ で停留としているから $\frac{d}{ds}\big|_{s=0}L(c_s)=0$ となるべきで，$c(\tau)$ に沿って $\frac{\partial}{\partial s}c_s\big|_{s=0}=\dot{t}(\tau)\partial_t+\dot{q^i}(\tau)\partial_{q^i}+\dot{p_j}(\tau)\partial_{p_j}$ とすると，微分と積分の順序交換と部分積分で

$$\frac{\partial}{\partial s}L(c_s)\Big|_{s=0}=\int_0^1\Big((dH-\partial_t H dt)(X_H)\dot{t}$$
$$+(dp_i+\partial_{q^i}H dt)(X_H)\dot{q^i}-(dq^j-\partial_{p_j}H dt)(X_H)\dot{p_j}\Big)d\tau=0$$

となる．$\dot{t},\dot{q^i},\dot{p_j}$ が任意だからこれに変分学の基本補題を使って (3.9) 式が得られるのである（この考え方と最後の章の経路積分の考え方を組み合わせてみると面白い）．

この考え方は $\delta L(c)=0$ のように変分法で与えられた古典場の方程式をハミルトン系のように思うときにも使われる．またハミルトン系のように思うと量子化（正準量子化）というものが考えやすくなるので古典場の量子化を考えるときにも使われている（正当か否かは別問題）．

相対論化というのは，パラメーターと思っていた変数を積極的に座標関数と思い直すことでしかない，とカルタンは言いたいのではなかろうか？

3.3.1 ヤコビ代数からポアソン代数へ

上で接触形式というのを述べたが，数学的定義は次のようなものである．

定義 3.1 $(2n-1)$-次元の C^∞-多様体 M 上の C^∞-1 次微分形式 ω がいたるところで $\omega \wedge (d\omega)^{n-1} \neq 0$ となっているとき**接触形式**と呼ぶ．接触形式を持っている多様体を（前章での述べ方に合わせて）$\mathcal{O}$-**接触多様体**と呼ぶ．

典型的な $\mathcal{O}$-接触多様体は（少し後のほうで述べる）C^∞-リーマン多様体 $N(\dim N = n)$ の余接球束 $M = S_N^*$ である．$\theta = p_i dx^i$ は T_N^* 上の 1 次微分形式であるが，これは**正準 1-形式**と呼ばれている．ω を θ の S_N^* への制限とする．$T_N^* - \{0\}$ 上では $\theta = r\omega$ であり，

$$d(r\omega) = dr{\wedge}\omega + rd\omega, \quad (d(r\omega))^n = r^{n-1} dr{\wedge}\omega{\wedge}(d\omega)^{n-1}$$

だが $d(r\omega)$ がシンプレクティック形式だから左辺は $\neq 0$ となり，ω は S_N^* 上の接触構造を与える．次の定理もダルブーの定理と呼ばれている．

定理 3.3（ダルブーの定理） $\mathcal{O}$-接触多様体 M では，任意の点の近傍で，座標関数 $x^1, \cdots, x^n, y_1, \cdots, y_n, z$ で $\omega = dz + \sum_{i=1}^n y_i dx^i$ となるようなものがとれる．このような局所座標系を**局所ダルブー系**と呼ぶ．

dz の係数が 1 となっていることを気にする人はここを Hdz のように書いてもよい．ただし $H \neq 0$ とする．

$\mathcal{O}$-接触多様体 M で接触形式 ω に対して各点 $p \in M$ で $d\omega_p(X_p) = 0$ となる接ベクトル X_p がスカラー倍を除いて一意的に決まる（前節参照）．そこで，$\omega(X_p) = 1$ と規格化しておけば，これで M 上に C^∞-ベクトル場が定まる．これを**特性ベクトル場**と呼び，ξ_ω と書く．定理 3.3 の局所ダルブー系で書けば $\xi_\omega = \partial_z$ である．

前に述べた $\mathcal{O}$-シンプレクティック多様体とシンプレクティック多様体との関係と同じで，多様体を表に出さないで次のように定義することもできる．

定義 3.2 可換代数 $B = \mathcal{O}$ が**ヤコビ代数**であるとは（特性ベクトル場と称する）微分 $\xi_0 : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ と交代双微分 $\{\,,\,\} : \mathcal{O} \times \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ が定義されており，ξ_0 が $\{\,,\,\}$ についても微分の性質 $\xi_0(\{f,g\}) = \{\xi_0(f), g\} + \{f, \xi_0(g)\}$ を持ち，かつリウヴィル (Liouville) 括弧積と呼ばれる

$$\{f,g\}_c = \xi_0(f)g - f\xi_0(g) - \{f,g\}$$

が $\mathcal{O}$ にリー代数を定義する場合をいう．

ポアソン代数とは特性ベクトル場 ξ_0 が 0 のヤコビ代数のことである．特性ベクトル場 ξ_0 が 0 のときには $\{f, g\}$ はヤコビ恒等式も満たし，3.1.1 項で定義したポアソン括弧積となるからである．

$\mathcal{O} = C^\infty(M)$ $(\dim M = 2n+1)$ であり，$\{\,,\,\}$ の階数がいたるところ $2n$ で ξ_0 がいたるところ $\neq 0$ であるとき，$(\mathcal{O}, \{\,,\,\}, \xi_0)$ を**接触代数** (contact algebra) と呼ぶ．この場合 $(M, \{\,,\,\}, \xi_0)$ を**接触多様体**と呼ぶ．

$\mathcal{O}$-接触多様体と接触多様体

> $\mathcal{O}$-接触多様体，接触多様体という 2 通りの定義はほとんど同じことをそれぞれの立場で述べているのだが，これを見るには点集合の描像がしっかり使われる多様体上での微分幾何的取り扱いが必要である（これも必要悪！）．

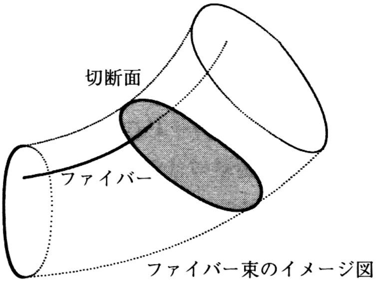
点描像優先の述べ方

これまでは多様体の点集合の描像よりも場の描像を優先させて述べてきたのだが，もう少し微細なことを述べようとすると点集合の描像を優先させた述べ方にしないと述べ切れないことも起こる．

これまでも余接束 T^*_N を相空間として扱ってきたが，これは各余接空間の集合 $T^*_N = \bigcup_p T^*_p N$ のことであった（ただし $p \neq q$ のときには $T^*_p N \cap T^*_q N = \emptyset$ と考える）．その意味を込めて $\coprod_q T^*_q N$ という書き方をする．これは直積空間に近い概念で q を決めてからなら $T^*_q N$ の点という述べ方が許されるので，$\coprod_q T^*_q N$ の点を $(q; v)$ のように書く．q を決めてからでないと v は意味を持たない．接空間でも同様で，次のように書く：

$$T_N = \coprod_{q \in N} T_q N, \quad T^*_N = \coprod_{q \in N} T^*_q N \quad \text{（点集合と見ているということ）}.$$

これをベクトル空間の集団 $\{T_q N; q \in N\}$ などが底空間 N によって束ねられた姿だと見て一般に**ベクトル束**と呼ぶ．$T_q N$ は q という目印のついた 1 本の細い針金 (fiber) のようにイメージするのである．T_N は**接束**（接空間束）(tangent bundle)，T^*_N は**余接束**と呼ばれる．**部分束**などという言葉も自然に定義できるであろう．とくに直積空間 $N \times E$ は**自明束**と呼ばれる．自明束 $N \times \mathbb{R}$ は 1_N と書かれることが多い．C^∞-リーマン多様体 N の各点 q で単位コベクトルの全体集合 $S^*_q = \{\xi \in T^*_q N; |\xi| = 1\}$ を考え束 $S^*_N = \coprod_{q \in N} S^*_q$ を**余接球束** (unit cosphere



bundle) と呼ぶ．また $D_q^* = \{\xi \in T_q^*N; |\xi| < 1\}$ を考え束 $D_N^* = \coprod_{q\in N} D_q^*$ を**単位開球体束** (unit open disc bundle) と呼ぶ．さらに $\bar{D}_q^* = \{\xi \in T_q^*N; |\xi| \leq 1\}$ を考え束 $\bar{D}_N^* = \coprod_{q\in N} \bar{D}_q^*$ を**単位閉球体束** (unit closed disc bundle) と呼ぶ．$\mathbb{R}^n$ が n-次元開球体と C^∞-同相であるのと同様に T_N^* は D_N^* と C^∞-同相である．また $\bar{D}_N^*$ の境界 $\partial\bar{D}_N^*$ は S_N^* である．したがって S_N^* を T_N^* の無限遠方に貼り付いているものと見ることもできる．

一般にベクトル束を $E_N = \coprod_{q\in N} E_q$ のように書く．E_N は細い針金が束になっている電話のケーブルみたいなイメージだからこのケーブルの**切断面** (cross section) といえばどういうものかイメージが湧くであろう．

定義 3.3 ベクトル束 $E_N = \coprod_{q\in N} E_q$ において，E_N から E への自然な射影を π とする．このとき写像 $s : N \to E_N$ で $\pi s : N \to N$ が恒等写像 $(\pi s(p) = p)$ となるものを**切断面**，または**切断**と呼ぶ．N, E_N が C^∞-多様体のとき，C^∞-切断面の全体を $\boldsymbol{\Gamma}(E_N)$ と書く．

このように点描像をしっかりさせてしまえば後の概念構成は楽である．C^∞-ベクトル場の全体や，コベクトル場の全体はこれまでは $\mathcal{X}(N)$ とか $\mathcal{X}^*(N)$ と書いてきたがこの理解様式では $\boldsymbol{\Gamma}(T_N), \boldsymbol{\Gamma}(T_N^*)$ のように書かれる．

記号が変わるので要注意だが，$\mathcal{O}$-接触多様体 (M, ω) が与えられたとき接束 T_M の部分束 E_ω を $\omega = 0$（各点で考えよ）で定義する．これも各点で考えて $T_M = \mathbb{R}\xi_\omega \oplus E_\omega$ と書かれても理解可能であろう．この分解で $\forall u \in \boldsymbol{\Gamma}(T_M)$ に対して次のようにおく：

$$u = f\xi_\omega + \hat{u}, \qquad \hat{u} \in \boldsymbol{\Gamma}(E_\omega). \tag{3.10}$$

点描像は理論構成，概念構成の強力な補助手段ではある．この理解様式では関数空間 $C^\infty(N)$ は $\boldsymbol{\Gamma}(1_N)$ のように書かれる．

3.3.2 リー微分，カルタンの公式

$\mathcal{O}$-接触多様体 (M, ω) が与えられているものとしよう．C^∞-同相 $\varphi : M \to M$ が**接触変換**であるとは，$\varphi^*\omega$ が ω の関数倍となる，つまり $f_\varphi \in C^\infty(M)$ があって $\varphi^*\omega = f_\varphi \omega$ が成立する場合をいう．無限小接触変換のなすリー環は上の式をリー微分して $\mathcal{L}_u \omega = h\omega$ で与えられる．

内部積，または代入

$\mathcal{X}(M)$ を M 上の C^∞-接ベクトル場の全体とする．局所座標系上で $dx^i(\partial_{x^j}) = \delta^i_j$ と定義することにより $\mathcal{F}^{(1)}_M \times \mathcal{X}(M)$ から $C^\infty(M) = \mathcal{F}^{(0)}_M$ への自然な双線形写像が得られる．これを**内部積**とか**代入**と呼び $\langle \omega, u \rangle$, $\omega(u)$, $\omega \lrcorner u$, $\iota_u \omega$ などと書く．ι は $\mathcal{F}^{(p+1)}_M \times \mathcal{X}(M)$ から $\mathcal{F}^{(p)}_M$ の上への双線形写像として自然に拡張され，$\mathcal{F}^{(p+1)}_M \to L(\mathcal{X}(M), \mathcal{F}^{(p)}_M)$ も全射となる（(1.9) 式参照）．

カルタンの公式

$\forall \omega \in \mathcal{F}^p_M$ に対し，（少し面倒な計算だが）(1.9) 式から直接計算で

$$\mathcal{L}_X \omega = d(\iota_X \omega) + \iota_X d\omega \quad \text{（カルタンの公式）} \tag{3.11}$$

が成立することがわかる．これは外微分とリー微分との関係を与える基礎的な公式で，さまざまなところに出てくる．（リー微分と共変微分の間にはこのようなうまい関係はない．）

(3.11) 式より，無限小接触変換のなすリー環は

$$\boldsymbol{\Gamma}_\omega(T_M) = \{u \in \boldsymbol{\Gamma}(T_M);\ d(\omega \lrcorner u) + d\omega \lrcorner u = h\omega\}$$

で与えられる．ただし h は u によって決まる C^∞-関数である．逆に $u \in \boldsymbol{\Gamma}_\omega(T_M)$ とすると，(3.10) 式のように書けば $\omega \lrcorner \hat{u} = 0$ だから，$f = \omega \lrcorner u$ として f を定めると，リー微分の定義より $\mathcal{L}_u \omega = h\omega$ だが，(3.11) 式より $df + d\omega \lrcorner \hat{u} = h\omega$ となり，これより $h = df \lrcorner \xi_\omega = \xi_\omega f$ がわかる．

$\xi_\omega = 0$ によって T^*_M の部分ベクトル束 E^*_ω を定義すれば $\forall X \in E_\omega$ に対して $d\omega \lrcorner X \in E^*_\omega$ であり，E_ω も E^*_ω も同じ次元だから

$$d\omega : E_\omega \to E^*_\omega \quad \text{（各点 } p \text{ ごとに } E_\omega(p) \to E^*_\omega(p) \text{ が線形同型となっているということ）}$$

は束同型となる．$df - (\xi_\omega f)\omega \in \boldsymbol{\Gamma}(E^*_\omega)$ だから $(d\omega)^{-1}$ を $d\omega$ の逆写像として次がわかる：

$$\hat{u} = -\{f\}, \quad \text{ただし } \{f\} = (d\omega)^{-1}(df - (\xi_\omega f)\omega). \tag{3.12}$$

これより $u = f\xi_\omega - \{f\}$ となる．

逆に $\forall f \in C^\infty(M)$ に対して，$u_f = f\xi_\omega - \{f\}$ は $\boldsymbol{\Gamma}_\omega(T_M)$ の元で，とくに $u_1 = \xi_\omega$ でもある．この対応 $f \leftrightarrow u_f$ は $\boldsymbol{\Gamma}_\omega(T_M)$ と $C^\infty(T_M)$ の間の線形同型を与える．

$\boldsymbol{\Gamma}_\omega(T_M)$ のリー代数の構造はこの線形同型を通して $C^\infty(T_M)$ の上に写される．つまり，新しい括弧積 $\{f,g\}_c$ を $[u_f, u_g] = u_{\{f,g\}_c}$ で定義する．$\{f,g\}_c$ の正確な計算公式は次の補題で与えられる．

補題 3.3 $u_f = f\xi_\omega - \{f\}$, $u_g = g\xi_\omega - \{g\}$ に対して，$[u_f, u_g] = u_h = h\xi_\omega - \{h\}$ とおいてやると h は $h = g\xi_\omega f - f\xi_\omega g - \{f,g\}$, $\{f,g\} = df\lrcorner\{g\}$ で与えられる．つまりリー代数 $\boldsymbol{\Gamma}_\omega(T_M)$ はリー代数 $(\boldsymbol{\Gamma}(1_M); \{\ ,\ \}_c)$ と同型である．$\{f,g\}_c = g\xi_\omega f - f\xi_\omega g - \{f,g\}$ である．

証明 上の公式は直接計算でも確かめられるが，別の証明を与えておこう．

ω が M 上の接触形式なら直積 $\mathbb{R}_+ \times M$ 上の 2 次微分形式 $\Omega = d(r\omega)$ はシンプレクティック形式である．$\boldsymbol{\Gamma}(1_M)$ は $f \mapsto rf$ として自然に $\boldsymbol{\Gamma}(1_{\mathbb{R}_+\times M})$ に埋め込める．$\Omega\lrcorner X_{rf} = d(rf)$ で定義されるハミルトン・ベクトル場 X_{rf} を計算してみると

$$X_{rf} = -r(\xi_\omega f)\partial_r + f\xi_\omega - \{f\}$$

となる．逆に X が $Xr = 0$ を満たす $\mathbb{R}_+ \times M$ 上の無限小シンプレクティック変換ならば，$X = X_{rf}$ となる $f \in \boldsymbol{\Gamma}(1_M)$ がある．これらの等式より

$$-d(r\omega)\lrcorner[X_{rf}, X_{rg}] = d(r(g\xi_\omega f - f\xi_\omega g - df\lrcorner\{g\}))$$

であるから，$h = g\xi_\omega f - f\xi_\omega g - df\lrcorner\{g\}$ とおいて

$$[X_{rf}, X_{rg}] = -r(\xi_\omega h)\partial_r + h\xi_\omega - \{h\} = X_{r\{f,g\}_c}$$

がわかる．このベクトル場を底空間 M で考えればよい．（証明終わり）

補題 3.3 で与えた定義より $\{f,g\} = -\{g,f\}$ であり，$\{f,g\} = df\lrcorner\{g\}$ であるから $\{f,g\}$ は双微分である．しかし $\{f,g\}$ はヤコビ恒等式を満たすとは限らない．一方，$\{\ ,\ \}_c$ はヤコビ恒等式を満たすが双微分ではない．

特性ベクトル場 ξ_ω は r から定義されるハミルトン・ベクトル場であるから，$\xi_\omega\{f,g\}_c = \{\xi_\omega f, g\}_c + \{f, \xi_\omega\}_c$ であり，ξ_ω は

$$\xi_\omega\{f,g\} = \{\xi_\omega f, g\} + \{f, \xi_\omega g\}$$

を満たす．$r\partial_r$ は**共形シンプレクティック・ベクトル場**と呼ばれるものである．つまり，$d(d(r\omega)\lrcorner r\partial_r) = d(r\omega)$ である．

3.3.3　曖昧ベクトル束と C^∞-局所座標系

3.3.1 項ではベクトル束を $E_N = \coprod_{q\in N} E_q$ のように書いていて E_N の点は $(q;v)$ のように $q \in N$ を与えてから $v \in E_q$ を与えるという書き方で与えている．3.3.1 項ではこのように考えた E_N は全体として多様体になっているものしか扱っていないのだが，実は $E_N = \coprod_{q\in N} E_q$ と書かれるものの中には**概念的には多様体はおろか考えようでは点集合にもなっていないものが含まれている**のである．このようなものを**曖昧**（あいまい）**ベクトル束**と呼んでおく．曖昧ベクトル束では $\pi(q;v) = q$ という写像 $\pi : \coprod_{q\in N} E_q \to N$ が自然に定義されるから，N の部分集合 U に対して $\pi^{-1}(U) = \coprod_{q\in U} E_q$ が考えられる．さらに写像 $g : \coprod_{q\in U} E_q \to \coprod_{q\in U} E_q$ で $g(q;v) = (q; d_q(v))$ で各 $d_q : E_q \to E_q$ が線形同型となっているような写像の概念も自然に定義される．このような写像を**曖昧束同型**と呼ぶが，q に関する微分可能性はおろか**連続性も要求していない**ことに注意してほしい．

曖昧ベクトル束と普通のベクトル束とどこが違うのかを明確にするために次の定義がいる：E_0 を（標準ファイバーを表す）ベクトル空間とする．

（ベクトル空間としてはどのファイバーも同型だから，実際にはどこかの点でのファイバーを E_0 とする．）

定義 3.4　U を N の開集合とする．写像 $\psi : U \times E_0 \to \pi^{-1}(U)$ が $\coprod_{q\in N} E_q$ の**局所自明化**であるとは，$\psi(q,y) = (q;\psi_q(y))$ であり，$\psi_q : E_0 \to E_q$ が線形同型となる場合をいう．局所自明化をともなった N の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ が与えられた曖昧ベクトル束を**局所自明曖昧ベクトル束**と呼ぶ．

$\coprod_{q\in N} E_q$ を局所自明曖昧ベクトル束とし，N の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ の各 U_α 上で局所自明化を $\psi_\alpha : U_\alpha \times E_0 \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ とする．記号を簡単にするため以下では次のように約束する：

$$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta, \quad U_{\alpha\beta\gamma} = U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma. \tag{3.13}$$

局所自明曖昧ベクトル束で $\Psi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1}\psi_\alpha : U_{\alpha\beta} \times E_0 \to U_{\beta\alpha} \times E_0$ が連続写像（C^∞-写像）になるものを（普通の）**ベクトル束**（C^∞-ベクトル束）と呼ぶ．

一般の局所自明曖昧ベクトル束では $\Psi_{\alpha\beta}$ は**連続写像**ではないのだが，各 $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ 上で曖昧束同型 $D_{\beta\alpha}: \pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \to \pi^{-1}(U_{\beta\alpha})$ があり

$$\Phi_{\beta\alpha} = \psi_\beta^{-1} D_{\beta\alpha} \psi_\alpha : U_{\alpha\beta} \times E_0 \to U_{\beta\alpha} \times E_0$$

が C^∞-写像となるようにできる場合がある．この場合，$U_{\alpha\beta\gamma}$ 上では $\Phi_{\alpha\gamma}\Phi_{\gamma\beta}\Phi_{\beta\alpha} = \psi_\alpha^{-1} D_{\alpha\gamma} D_{\gamma\beta} D_{\beta\alpha} \psi_\alpha$ （一般に $\neq 1$）であることに注意しておく．記号を簡単にするために次のような約束をする：

$$\Phi_{\alpha\beta\gamma} = \Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\beta\gamma}\Phi_{\gamma\alpha}, \quad D_{\alpha\beta\gamma} = D_{\alpha\beta} D_{\beta\gamma} D_{\gamma\alpha}. \tag{3.14}$$

定義 3.5　$\coprod_{q\in N} E_q$ が **C^∞-局所自明曖昧ベクトル束**であるとは上で与えられる $D_{\alpha\beta}$ が次の条件を満たす場合をいう：$D_{\alpha\alpha} = 1$, $D_{\alpha\beta}D_{\beta\alpha} = 1$ で $U_{\alpha'} \subset U_\alpha$, $U_{\beta'} \subset U_\beta, U_{\gamma'} \subset U_\gamma$ のとき $D_{\alpha'\beta'\gamma'} = D_{\alpha\beta\gamma}|_{U_{\alpha'\beta'\gamma'}}$（制限）.

$\Phi_{\alpha\beta}$ を**座標変換**と呼ぶ．**こちらを貼り合わせの写像だと思うのである．**

このように述べてくるとひどく人工的な定義に見えるが，それは可微分性を犠牲にして $\coprod_{q\in N} E_q$ を点集合として先に与えようとしたからである．微分可能な貼り合わせのほうを優先させると，一般には $D_{\alpha\beta\gamma} \neq 1$ であるから，この貼り合わせでは同値律にならず，これでは点集合が定義されない．つまり，局所的には個々の点を識別することはできても大域的には不可能なのである．このようになることを**貼り合わせが齟齬**（そご，discordance）**をきたす**という．

C^∞-局所自明曖昧ベクトル束は $\coprod_{q\in N} E_q$ と同時に局所自明化 $\psi: U_\alpha \times E_0 \to \pi^{-1}(U)$ をともなった N の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ を与えて決まるものだが，局所自明化は他にも考えられる．

定義 3.6　V を N の開集合とする．局所自明化 $\psi: V \times E_0 \to \pi^{-1}(V)$ が C^∞-局所自明曖昧ベクトル束 $\coprod_{q\in N} E_q$ に**許容される**（**受け入れ可能な**）**局所自明化**であるとは，$V \cap U_\alpha \neq \emptyset$ となる $\forall\alpha$ に対して曖昧束同型 $D_{V\alpha}: \coprod_{q\in V\cap U_\alpha} E_q \to \coprod_{q\in U_\alpha\cap V} E_q$ があり，これをメンバーに入れても定義 3.5 が損なわれない場合をいう．

C^∞-局所自明曖昧ベクトル束 $\coprod_{q\in N} E_q$ に許容される局所自明化を次々に加えていってその極大のもの（もうこれ以上加えられないもの．このようなものの存在証明には選出公理が使われている）を**アトラス**（全地図帳）と呼ぶ．

$\psi_\alpha^{-1} D_{\alpha\beta}\psi_\beta(q,v) = (q; d_q(v))$ と書いたとき線形変換 $d_q : E_0 \to E_0$ が（α, β も動かして）生成する群を**齟齬の群**と呼ぶ．

C^∞-局所自明曖昧ベクトル束は第 7 章で述べる $*$-指数関数がつくる奇妙な振る舞いをする "群"（曖昧被覆群）を理解するときの助けになると思われる．このような対象はこれまで数学の中で扱われたことはなく，詳しい記述もこの本がはじめてのものである．

多様体になっていないとはいえ，まだ多くの概念がそのまま生き残っており普通の多様体では期待できないようなものとも両立している可能性がある．

C^∞-局所自明曖昧ベクトル束は [4] で gerbe と呼ばれているものに近い概念である．このようなものが後のほうの計算の中に潜んでいるのである．

このような齟齬を許した束の概念はベクトル束に限らずもっと一般の束 (bundle) に自然に拡張される．詳しくは最後の章で扱う．

第 4 章　非可換世界の問題点

量子論はハイゼンベルグの立場で考えるとリー群のユニタリ表現論の考えに近くなってくる．ここでは自己共役性の問題を抱え込まなくてすむのだが，古典力学のときのように自由にハミルトニアンを選べない．シュレーディンガーの立場では配位空間は固定するがかなり自由にハミルトニアンを選べる．そのかわり，自己共役性の問題を抱え込む．万事好都合とはなかなかならないわけだが，さらに次のような問題もある．ハイゼンベルグの立場であれシュレーディンガーの立場であれ，ある対象のモデルが演算子の系として量子力学的に構成できたとして，その対象にある観測を行なって数値 a（観測値）を得たとしよう．それはいったい何の値なのだろうか？　$\mathcal{O}$ を構成する元には冒頭の素朴観測論のところで述べたような "値" というものが備わっているわけではないので，これは量子力学の発生当初からいろいろ論議されてきた問題で，いまだに完全な決着はついていない問題である．

ここでは一応数学的に述べやすい解釈を 1 つ与えておくだけにする．量子論的な考え方では観測のためにはその観測用のハミルトニアン H_{obs} を用意して対象に働きかけを行なわねばならないわけだが，H_{obs} で観測した場合実際に観測されるのは H_{obs} の**固有値**（数学的には $\mathrm{Spec}(H_{obs})$ と呼ぶほうがよい）のうちのどれかであるとされている．同じ観測を同じ状況で繰り返しても同じ数値が得られるわけではなく，客観的な意味が付けられるのはコピーをたくさんつくっておいて何回も繰り返した後の統計的数量に対してのみである（しかしそれはど

うしてなのだろう？　これを数学的に考えることは大切だと思う）．

量子論における観測値

> 不確定性を認めて，$\mathcal{O}$ は演算子からなる非可換代数だとすると，量子力学の理論は 1 回の観測結果を決定論的に予測する理論にはなり得ないで予測はいつでも「明日の天気の確率予報」みたいになるのである．しかしこれは**あたらないこともあるといっているのではない**．

観測値の意味の問題は棚上げにしても，量子論にはいろいろ数学的には不明な点がある．しかしそれらをすべて一気に論ずることはできないし，そのための用語がそろっているわけではないから，この章ではまず数学的に考えやすいものを基にして問題点のいくつかを拾い出して考えることにする．

4.1　位相代数，位相群

これまでは，代数を考えるとき係数体は実数と仮定されていたし，位相はほとんど問題にしなかったが，上のような問題を考えると，どうしても複素係数の代数とか位相空間の話が必要になるのでそれをはじめに述べよう．

4.1.1　σ-フレシェ代数

実数体または複素数体 K を係数体とする線形空間 V において $\forall u, v \in V$, $\forall c \in K$ に対して左の 3 つの性質を持つ V から $\mathbb{R}$ への写像を**セミノルム** (seminorm) と呼ぶ．(1) の性質に加えて $\|u\|=0 \Leftrightarrow u=0$ の性質もあるとき**ノルム** (norm) と呼び，ノルムの定義された線形空間を**ノルム空間**という．ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ では $d(u,v) = \|u-v\|$ と定義すると d は距離関数となる．ノルム空間 $(V, \|\cdot\|)$ でノルムから決まる距離に関して完備距離空間となっているものを**バナッハ** (Banach) **空間**と呼ぶ．

(1) $\|u\| \geq 0$
(2) $\|cu\| = \|c\|\|u\|$
(3) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$

K を係数体とするバナッハ空間 $(V, \|\cdot\|)$ であり，ノルム $\|\,\|$ を使って

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{4}(\|u+v\|^2 - \|u-v\|^2)$$

(1) $\langle u,v\rangle$ は u,v について $\mathbb{R}$-双線形
(2) $\forall c\in\mathbb{C}$ について $\langle cu,v\rangle=c\langle u,v\rangle$
(3) $\forall c\in\mathbb{C}$ について $\langle u,cv\rangle=\bar{c}\langle u,v\rangle$

と定義したとき $\langle u,v\rangle$ が左の性質を持つとき**ヒルベルト** (Hilbert) **空間**と呼ぶ．$\bar{c}$ は c の複素共役である．したがって $K=\mathbb{R}$ のときは $\bar{c}=c$ である．$K=\mathbb{C}$ のときには $\langle u,v\rangle$ は**エルミート** (Hermite) **内積**と呼ばれる．このように位相空間であり，同時に線形空間であり，線形空間としての演算がすべて連続であるものを総称して**位相線形空間**という．

可能観測全体 $\mathcal{O}$ を位相線形空間として扱うときなどはバナッハ空間ではきつすぎるので次のような可算個のセミノルムの列で位相が与えられるものを考える．まず，次のことは容易にわかるだろう：$x,y\geq 0$, $0\leq a_k\leq 1$ のとき

$$\frac{x+y}{1+(x+y)}\leq\frac{x}{1+x}+\frac{y}{1+y},\qquad \sum_k\frac{1}{2^k}a_k\leq 1.$$

これらの不等式を利用すると V 上に可算個のセミノルム $\{\|\cdot\|_k\}_{k=1,2,3,\cdots}$ が定義されているとき，$\forall u,v\in V$ に対して

$$\rho(u,v)=\sum_k\frac{1}{2^k}\frac{\|u-v\|_k}{1+\|u-v\|_k}\tag{4.1}$$

と定義すると，ρ が V 上の距離関数となる．

K を係数体とする線形空間 V が **σ-フレシェ空間**であるとは V 上に可算個のセミノルム $\{\|\cdot\|_k\}_{k=1,2,3,\cdots}$ が定義されており，さらに，上で定義した距離 ρ に関して完備距離空間となる場合をいう．次は容易であろう：

$$\lim_n\rho(u_n,v)=0\iff\forall k\ \text{で},\quad \lim_n\|u_n-v\|_k=0.$$

位相空間であり，同時に結合代数であり，代数としての演算がすべて連続であるものを**位相結合代数**という．位相代数で，位相線形空間としては σ-フレシェ空間であるものを **σ-フレシェ代数**と呼び，同様にバナッハ空間であるものを**バナッハ代数**と呼ぶ．

以下のことは証明抜きで使うので証明は適切な参考書を見てもらいたい．

補題 4.1　V を σ-フレシェ空間，W をその線形閉部分空間とすると商空間 V/W も σ-フレシェ空間である．さらに V が σ-フレシェ代数，W をその閉両側イデアルとすると商空間 V/W は σ-フレシェ代数である．

単位開区間 $I = (-1, 1)$ から V への連続写像 f について（リーマン）**積分** $\int_a^b f(t)dt$ が普通のやり方で定義される．また点 $t = a$ で**微分可能**といった概念も定義されるから，C^k-関数とか C^∞-関数なども普通のやり方で定義される．これらについては後の 12.1 節で非線形版として解説してあるのでその節も参照してもらいたい．また，I から V への写像が**実解析的** (real analytic) という概念（テイラー展開が正の収束半径を持つということ）も普通に定義される．

4.1.2　位相群と均質空間

ついでに位相群についても述べておこう．**位相群** (topological group) とは文字どおり位相の入った群のことで，位相空間であり，同時に群であり，群としての演算がすべて連続になっているものである．具体的には次の演算が連続であればよい．

> 位相群とは位相の入った群 G で，写像 $\varphi(g, h) = gh^{-1}$ が $G \times G$ から G への連続写像になっているもののことである．

G の単位元 e を含む開部分集合全体を e の**開近傍系**と呼んで $\mathcal{U}_e$ と書く．

定義 4.1　位相群 G が**第 1 可算性**を持つとは e を含む可算個の開部分集合 $\{U_i\}_{i=1,2,3,\cdots}$ があって，どの $V \in \mathcal{U}_e$ に対してもうまく i を選べば $V \supset U_i$ となるようにできる場合をいう．

位相群であることから，G は位相空間としてはかなりよい性質を持つ．

定理 4.1（角谷(かくたに)の定理）　第 1 可算性を持つ位相群 G には距離関数 $d : G \times G \to \mathbb{R}_+$ で $\forall g, h, k \in G$ について次のような右不変性 $d(g, h) = d(gk, hk)$ を持ったものが定義され，この距離による位相はもとの位相に一致する．

上のような距離関数を**右不変距離**と呼ぶ．右不変距離を持った完備な位相群を**距離化群** (metric group) と呼ぶ．

位相群 G が位相空間 S に作用していてその作用 $\lambda : G \times S \to S$ が連続のとき，G が S に**連続に作用**しているという．

1 を含むバナッハ代数 B では $f \in B$ が十分 0 に近ければ $1 + f + f^2 + \cdots + f^k + \cdots$ が B の元にノルム位相で収束する．これは $1 - f$ の逆元である．これ

を使うと 1 を含むバナッハ代数 B の可逆元全体 G は B の開部分集合であり，積に関して群をなし，B から自然に位相を入れて位相群になることがわかる．

σ-フレシェ代数では 1 を含んでいてもこのようなことは一般にはいえないが，この性質を持つ例はかなりあるので次のような定義をしておく．

定義 4.2　1 を含む σ-フレシェ代数が**開可逆**であるとは可逆元全体が開部分集合となる場合をいう．

> 第 2 可算性を持つ有限次元 C^∞-多様体 M では $C^\infty(M)$ や外微分環 $\mathcal{F}_M^*$ を開可逆な σ-フレシェ代数にすることができる．また M がコンパクト C^∞-多様体ならば C^∞-同相写像全体 $\mathcal{D}(M)$ を距離化群にすることができる．

均質空間

G が距離化群で，H が G の閉部分群の場合で考えよう．G/H 上の距離 $\tilde{d}$ を

$$\tilde{d}([g],[h]) = \inf_{k\in H} d(g,hk) = \inf_{k\in H} d(gk,h) \tag{4.2}$$

と定義する．これが 1.1 節で述べた距離関数の性質を持つのである．

補題 4.2　$\tilde{d}([g],[h])$ は $S=G/H$ 上の距離関数である．

証明　$\tilde{d}([g],[h]) = \tilde{d}([h],[g]) \geq 0$ は自明．$\tilde{d}([g],[h]) = 0$ とすると，H 内に点列 $\{k_n\}_{n=1,2,\cdots}$ がとれて，$\lim_{n\to\infty} d(g,hk_n) = 0$ となるようにできる．三角不等式より $d(hk_m,hk_n) \leq d(hk_m,g) + d(g,hk_n)$ だから，これより $\{hk_n\}_{n=1,2,\cdots}$ がコーシー列である．完備性よりこれは hH の元に収束するので，収束先を hk_0 と書けば，$k_0 \in H$ で $d(g,hk_0) = 0$, つまり，$g = hk_0$ だから，$g \sim h$, つまり，$[g]=[h]$ となる．三角不等式は $\tilde{d}([g],[h]) = d(g,ha)$ となる $a \in H$ が必ず見つかることを使えばわかる．（証明終わり）

E を $\mathbb{C}$ 上のエルミート内積の入ったヒルベルト空間とし，左のような記号で考える．有界というのは連続と同じ意味．可逆といっているのは逆写像も有界のもの，エルミート作用素とは

$L(E)$	:	E から E への有界作用素全体
$H(E)$	:	同じく有界エルミート作用素全体
$GL(E)$	:	同じく可逆有界作用素全体
$U(E)$	:	ユニタリ作用素全体

${}^t\bar{H} = H$ となる作用素，ユニタリ作用素とは ${}^t\bar{U}U = I$ となる作用素のことである．E はむろん有限次元でもよい．$L(E)$ にはいろいろな位相を入れて考えるが，普通使うのは（強い順に）一様位相（作用素の位相），強位相（各点ごとの位相），および弱位相である．

無限次元のヒルベルト空間では $L(E)$ は一様位相でバナッハ環であり，開可逆で可逆部分が $GL(E)$ であるが，強位相では第 1 可算性を持っていない位相環になる．$GL(E)$ は強位相に関して位相群になっていない（逆元の連続性がない．しかしつねに逆元も考慮する修正した位相を入れると位相群になる）．

$U(E)$ は一様位相で距離化群（しかもバナッハ–リー群と呼ばれる無限次元リー群）になっており，強位相に関しても位相群になっているが第 1 可算性を持っていない．（こういうややこしいものと上手につき合う方法は，全部覚えようとしないで，「ややこしい」ということだけを記憶することである．）

4.1.3　直積空間

ここで扱うものは後で述べる形式的 μ-制御代数を扱うときに必要になる．V_k, $k = 1, 2, 3, \cdots$ を位相線形空間としたとき，有限個の直積空間 $\prod_{k=1}^m V_k = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m$ には普通**直積位相**を入れるが，これは

$$\prod_{k=1}^{m} \{V_k \text{ の開集合}\} \quad \text{（各 } V_k \text{ の開集合の直積集合のこと）}$$

の形に書かれる集合を開集合の基としてつくる位相である．この位相で $\prod_{k=1}^m V_k$ は位相線形空間となる．各 V_k が σ-フレシェ空間のとき，この位相で $\prod_{k=1}^m V_k$ が σ-フレシェ空間となることは容易にわかる．セミノルム系は V_k のセミノルム系を $\|\cdot\|_{m,\ell}$, $\ell = 1, 2, 3, \cdots$ として次のように入れる：

$$\|(a_1, \cdots, a_m)\|_\ell = \sum_{k=1}^{m} \|a_k\|_{k,\ell}.$$

$m = \infty$ の場合はどのようになるであろうか？

無限に関する作法

このへんは無限に関する数学の作法と理解してほしい．無限を含む論理はコンピュータでは扱えない，人間だけの，言語に近いものだから一定の作法を守った言語を使っていないと混乱が生ずるのである．

自然数の集合 $\mathbb{N}$ の各元 m に対して位相線形空間 V_m が与えられているとす

る．このとき**直積空間** $\prod_{m\in\mathbb{N}} V_m = V_1 \times V_2 \times \cdots \times V_m \times \cdots$ とは

$$(a_1, a_2, \cdots, a_m, \ldots), \quad a_m \in V_m$$

全体のなす空間のことである．この空間の元は $\prod_m (a_m)$ のように書かれる．

さらに，**直和空間** $\Sigma_{m\in\mathbb{N}} V_m$ とはどこかの番号から先がすべて 0 となるような

$$(a_1, a_2, \cdots, a_m, \ldots, 0, \cdots, 0, \cdots), \quad a_m \in V_m$$

の全体のことである．m はむろん，元ごとに変わる．この空間の元は $\Sigma_m (a_m)$ のように書かれる．

直積位相

$\prod_{m\in\mathbb{N}} V_m$ に入れる**直積位相**とは m を任意として

$$\prod_{k=1}^{m} \{V_k \text{の開集合}\} \times \prod_{k=m+1}^{\infty} V_k$$

有限個の空間を除いては全体になっている．これは 1 つ 1 つの成分に注目しているということである．

の形に書かれる集合を開集合の基としてつくる位相である．

各 V_m が完備空間のときには $\prod_{m\in\mathbb{N}} V_m$ も直積位相に関して完備である．

V_m が σ-フレシェ空間のときには，$\prod_{m\in\mathbb{N}} V_m$ も直積位相に関して σ-フレシェ空間となる．セミノルム系は次のように入れればよい．V_m のセミノルム系を $\|\cdot\|_{m,\ell}$, $\ell = 1, 2, 3, \cdots$ として $\prod_{m\in\mathbb{N}} V_m$ の元 $\prod_m (a_m)$ に対して

$$\left\| \prod_m (a_m) \right\|_{k,\ell} = \sum_{m=1}^{k} \|a_m\|_{m,\ell}$$

と定義する（k, ℓ が動いてセミノルム系となる）．

$a_n \in V$ で $\sum a_n z^n$ の形に書かれているが，z に関する収束性をまったく問題にしていないとき，これを z に関する**形式的冪級数**と呼んで $V[[z]]$ のように書く．形式的冪級数の全体に位相を入れるときにはこれをたんに $\{a_n\}_{n=0,1,2,\cdots}$ の集まりとみなして直積位相を入れる．

4.3 節で述べる形式的 μ-制御代数 $B[[\mu]]$ ではこの位相を入れて σ-フレシェ空間とする．

また $\bigcap_k \mu^k * \mathcal{O} = \{0\}$ である準解析的 μ-制御代数では次に述べる射影極限位相を入れて考える．

射影極限位相

記号はこれまでどおりとし，各 $k \in \mathbb{N}$ で連続線形写像 $\pi_k : V_{k+1} \to V_k$ が与えられているものとしよう．こういうものを**射影的系** (projective system)，または**逆的系** (inverse system) という．直積空間 $\prod_{m\in\mathbb{N}} V_m$ の元

$$(a_1, a_2, \cdots, a_m, \dots), \quad a_m \in V_m$$

で各 k で $\pi_k(a_{k+1}) = a_k$ が成立しているもの全体を考え，これを

$$\operatorname{proj}\lim_{m\to\infty} V_m, \quad \varprojlim V_m$$

などと書き，**射影極限**と呼ぶ．位相は直積位相から自然に誘導する（相対位相）が，これを**射影極限位相**と呼ぶ．

各 V_m が σ-フレシェ空間のときには，$\operatorname{proj}\lim_{m\to\infty} V_m$ も σ-フレシェ空間となる．

帰納極限位相

無限個の直和空間というのはこの本ではあまり使わないが，たとえば $\mathcal{O}$ に形式的に μ^{-1} を添加して

$$\mu^{-k}a_{-k} + \cdots + \mu^{-1}a_{-1} + a_0 + \cdots + \mu^{\ell}a_{\ell} + \cdots$$

のように負冪が有限で切れるような元を考えることができる．これの全体を $\mathcal{O}[\mu^{-1}]$ のように書くが，これは $\bigcup_{k\geq 0} \mu^{-k}\mathcal{O}$ の意味である．$\bigcup_{k\geq 0} \mu^{-k}\mathcal{O}$ には帰納極限位相と呼ばれる位相を入れる．これは $\bigcup_{k\geq 0} \mu^{-k}\mathcal{O}$ の部分集合 U が開部分集合であるとは $\forall \ell > 0$ に対して $U \cap \mu^{-\ell}\mathcal{O}$ が $\mu^{-\ell}\mathcal{O}$ の開部分集合になることだと定義して入れる位相である．

この位相に関して $\mathcal{O}[\mu^{-1}]$ は完備空間にはなるのであるが，この位相は第 1 可算性を持っていないのでフレシェ空間にならず，使い勝手があまりよくない（実際この本ではほとんど使わない）．

4.2 扱うべきものと問題点

余接束 T_N^* はシンプレクティック多様体であり，これは定義よりポアソン多様体であるから，最も典型的なポアソン代数は例 3.1 で与えた $\mathcal{O} = (C^\infty(T_N^*), \{\ ,\ \})$

である．N は**配位空間** (configuration space) と呼ばれる．しかし，古典力学に現れるポアソン代数は $(C^\infty(T_N^*), \{,\})$ だけではなく，もっとさまざまなポアソン代数が現れている．たとえば古典熱力学に現れる状態空間は配位空間として理解するものではなく，古典力学的には相空間の一種として理解すべきものである．すると $\mathcal{O}$ としてはどんなものを考えればよいのだろうか？

注意 4.1　複素係数体の場合． 複素係数体で可換代数 $\mathcal{O}$ を考えるときには代数の「微分」と「接ベクトル場」とが一致しないので注意しなければならない．これは実多様体 M 上の複素数値 C^∞-関数環を $\mathcal{O}$ としたとき，これの微分 X は一般には複素係数のベクトル場であって M の接ベクトル場ではない（M が複素多様体ならよい）．したがって，X の積分曲線とか $\exp tX$ といったものは考えられない．微分 X が M の接ベクトル場になるのは M 上の実数値 C^∞-関数環を $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ としたとき X が $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ の微分にもなっている場合である．

4.2.1　リー群の余随伴表現

ハイゼンベルグの行列力学と呼ばれているものでは，演算子の代数 $\mathcal{O}$ で交換子積を使って定義される $\frac{1}{\hbar i}[A,B]$ を古典力学のポアソン括弧積に対応するものとし，$F \in \mathcal{O}$ の時間変化は次の式で与えられるとされている：

$$\frac{d}{dt}F(t) = \frac{1}{\hbar i}[H, F(t)], \quad F(0) = F. \tag{4.3}$$

これはリー群論的な意味が付く式なので，まずリー群論をざっと解説しよう．

有限次元リー群

位相群であり同時に C^∞-多様体にもなっていて群の演算がすべて微分可能となっているものを**リー群**と呼ぶ．G をリー群とし，まず $\forall g \in G$ に対し次のような記号を用意する．

T_gG	:	$g \in G$ における接空間
$L_g : G \to G$	:	$x \to gx$ なる可微分同相
$R_g : G \to G$	:	$x \to xg$ なる可微分同相
$\mathcal{A}_g : G \to G$	:	$x \to gxg^{-1}$ なる自己同型

$L_gL_h = L_{gh}$, $R_gR_h = R_{hg}$, $\mathcal{A}_g = L_gR_{g^{-1}}$ などの性質は明らかであろう．$\mathfrak{g}$ を単位元 e における G の接空間とし，それぞれの微分写像を単位元 e で考えて上のような記号を使う．$\forall X \in \mathfrak{g}$ に対して g を

$dL_g : \mathfrak{g} \to T_gG$	:	L_g の微分写像
$dR_g : \mathfrak{g} \to T_gG$	:	R_g の微分写像
$Ad(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$	:	$\mathcal{A}_g$ の微分写像

群 G 上を動かして $\tilde{X} = \{dL_gX; g \in G\}$ を考えれば，$\tilde{X}$ は G 上の C^∞-接ベクトル場となる．これは X を群演算によって平行移動してつくったような接ベクトル場だから完備接ベクトル場となることがわかる．$\tilde{X}$ の積分曲線で単位元 e を始点とするものを $\exp tX$ と書く．有限次元と仮定しているので積分曲線の存在は保証されている．これは G の 1 径数部分群である．

リー群の一般的性質を箇条書きにしておこう：

(1) $\exp : \mathfrak{g} \to G,\ X \to \exp X$ は C^∞-写像で，しかも e のところでの微分写像 $(d\exp)_e : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ は恒等写像．

(2) $Ad(g)X = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \mathcal{A}(g)(\exp tX)$ でしかもこれは $g \in G$ についても C^∞．
これより，$\exp Ad(g)X = g(\exp X)g^{-1}$ もわかる．

(3) $[X, Y] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} Ad(\exp tX)Y$ と定義すると，$\mathfrak{g}$ はリー代数となる．
これを G のリー環と呼ぶ．

(4) $Ad(g)[X, Y] = [Ad(g)X, Ad(g)Y]$. つまり，$G$ はリー環 $(\mathfrak{g}; [\,,\,])$ に自己同型群として作用する．

(5) $Ad(\exp tX)Y = \exp t\mathrm{ad}(X)Y$. 　（ただし $\mathrm{ad}(X)Y = [X, Y]$）

上はおもに計算の時に使われるが，**概念的には次に述べる性質が大切**である．

命題 4.1 　G を有限次元リー群，H を G の閉部分群とすると H はリー群となる．リー環は $\mathfrak{h} = \{X \in \mathfrak{g}; \exp tX \in H, \forall t \in \mathbb{R}\}$ で与えられる．さらに商空間 G/H は C^∞-多様体である．

N を G の閉正規部分群とすると商群 G/N はリー群で，リー環は $\mathfrak{g}/\mathfrak{n}$ である．ただし $\mathfrak{n} = \{X \in \mathfrak{g}; \exp tX \in N, \forall t \in \mathbb{R}\}$ である．

ここまでくると (4.3) 式は $\frac{1}{\hbar i}H, F(t) \in \mathfrak{g}$ に対して書かれた式のように読める．解は $Ad(\exp t\frac{i}{\hbar}H)F$ である．計算は次のようになる．定義より容易に $Ad(\exp(t+s)X)Y = Ad(\exp tX)Ad(\exp sX)Y$ がわかるから (3) より

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dt}Ad(\exp t\frac{i}{\hbar}H)F =& \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} Ad(\exp s\frac{i}{\hbar}H)Ad(\exp t\frac{i}{\hbar}H)F \\
=& [\frac{i}{\hbar}H, Ad(\exp t\frac{i}{\hbar}H)F]
\end{aligned}
$$

である．すると，これは何の量子化と考えるべきであろうか？　古典構造として考えられるポアソン代数を与えておこう．

【例 4.1】（例 9.1 参照）$X_1, \cdots, X_n$ を $\mathfrak{g}$ の基底とし，$\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の双対空間とする．各 X_i は $\mathfrak{g}^*$ 上の 1 次関数と思えるから，$C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ の元は $X_1, \cdots, X_n$ を座標関数とする C^∞-級の関数である．

$[X_i, X_j] = \sum C_{ij}^k X_k$，（$C_{ij}^k$ は**構造定数**と呼ばれる）とすると，ヤコビ恒等式より，$\forall a, i, j, k$ で $\sum_{(i,j,k)} C_{ij}^l C_{lk}^a = 0$ が成立する．

$\forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$, $\forall p \in \mathfrak{g}^*$ に対して df_p, dg_p は線形写像 $\mathfrak{g}^* \to \mathbb{R}$ だから，$\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$ より，$\mathfrak{g}$ の元と思ってよく，したがって $[df_p, dg_p] \in \mathfrak{g}$ である．そこで $\{f, g\}(p) = [df_p, dg_p](p)$ と定義すると，$(C^\infty(\mathfrak{g}^*), \cdot, \{\,,\,\})$ はポアソン代数である．$\{\,,\,\}$ に関するヤコビ恒等式はリー代数のほうのそれより得られる．

非可換代数と量子化

かなり多くの非可換代数が何かの量子化になっているとみなされる．上のものはその典型的例である．しかし，有限次元のリー群ではハイゼンベルグの要求した $[q, p] = \hbar i I$ などという関係式はどこにも見えていない．

$Ad(gh) = Ad(g)Ad(h)$ であったから，(4) より群 G は $\mathfrak{g}$ に自己同型群として作用している．これを G の**随伴** (adjoint) **表現**と呼ぶ．$\mathfrak{g}^*$ は $\mathfrak{g}$ の双対空間だから

$$\langle f, Ad(g)X \rangle = \langle Ad^*(g)f, X \rangle$$

で $Ad^*(g)f$ を定義してやれば G は $\mathfrak{g}^*$ にも自然に作用する．これを**余随伴** (coadjoint) **表現**と呼ぶ．これらの作用 Ad, Ad^* は C^∞ である．$\forall f \in \mathfrak{g}^*$ を固定して，$Ad^*(G)f = \{Ad^*(g)f; g \in G\}$ のことを **f の G による軌道** (orbit) と呼ぶが，この場合はとくに**余随伴軌道** (coadjoint orbit) と呼ばれている．**余随伴軌道はシンプレクティック多様体になる**ことがわかっている．

展開環

しかし，ハイゼンベルグ流の考えでも固有値という数値がほしいので $\mathcal{O}$ は結合代数となることも要求される．そこでたんなるリー群ではなしに行列表現されているリー群を考えることにする．

$M(n; \mathbb{C})$ を複素 $n \times n$ 行列の全体とする．$A \in M(n; \mathbb{C})$ に対し $e^{tA} = \sum_k \frac{t^k}{k!} A^k$

は収束し $GL(n;\mathbb{C})$ の元になり，しかも指数法則 $e^{(s+t)A}=e^{sA}e^{tA}$ がなりたつ．$A\in M(n;\mathbb{C})$ に対し $A^*={}^t\bar{A}$（転置複素共役）とする．容易に $(AB)^*=B^*A^*$，$(e^{tA})^*=e^{tA^*}$ がわかる．$A^*=-A$ となる行列を**歪エルミート行列**と呼び，その全体を $S(n)$ と書く．また $A^*=A$ となる行列を**エルミート行列**と呼び，その全体を $H(n)$ と書く．$S(n)=iH(n)$ である．部分集合 $U(n)=\{A\in M(n;\mathbb{C}); A^*A=I\}$ は群になるが，これを**ユニタリ群**という．$A=(a_{ij})$ と成分で書くと，

$$A\in U(n)\Rightarrow\sum_{i,j}|a_{ij}|^2=n,\quad \therefore\ U(n)\text{ は有界閉集合}$$

だから $U(n)$ はコンパクト集合で，命題 4.1 よりリー群になる．次のことが容易にわかる：

$$A\in S(n)\Longleftrightarrow e^{tA}\in U(n),\quad \therefore\ U(n)\text{ の単位元での接空間は } S(n).$$

$S(n)$ は行列の積では閉じないが，行列の交換子積 $[A,B]=AB-BA$ に関して $(S(n);[\ ,\ ])$ はリー代数になる．これを $U(n)$ の**リー環**と呼ぶ．

$U(n)$ の閉部分群 G を考える．G もリー群である．$\mathfrak{g}$ を G のリー環とすると，これが交換子に関して閉じて $S(n)$ の部分リー環となる．

$\mathfrak{g}\subset S(n)\subset M(n;\mathbb{C})$, $i\mathfrak{g}\subset H(n)$ であるが，ここで $\mathfrak{g}$ の元から行列の積や和やスカラー ($\mathbb{C}$) 倍を次々につくって結合代数として閉じるようにする．つまり，$\mathfrak{g}$ を含む最小の（$M(n;\mathbb{C})$ の）部分結合代数をつくる．これを $\mathfrak{g}$ の**展開環** (enveloping algebra) と呼び，$\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ と書く．

ほとんどの有限次元のリー群は十分大きな n をとれば $GL(n;\mathbb{C})$ の部分群と同型になることが知られているが，すべてがそうなるわけではない．

(4.3) 式は $e^{t\frac{1}{\hbar i}H}$ を求めれば簡単に解けて $A(t)=Ad(e^{t\frac{1}{\hbar i}H})A$ である．これが $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ にも自然に代数の自己同型として作用していることは明らかであろう．前に与えた $C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ と $\mathcal{E}(\mathfrak{g})$ との関係は後の 9.3.2 項で一応与える．

しかし，$A(t)$ と A の**固有値はまったく同じで時間変化しておらず，固有ベクトルだけが変化している**のである．これが時間発展を与えるというのだが，古典力学の何に対応し何の変化を表しているのだろうか？　固有ベクトルの時間変化を時間の関数として観測することはできるのだろうか？

4.2.2　自己共役作用素，代数的 Spec(H)

ハイゼンベルグの要請ではハミルトン関数として考えるべきものはヒルベルト空間に作用する自己共役作用素であった．自己共役作用素の定義は与えていないが，ここではストーンの定理 3.2 を成立させるものと理解していればよい．

自己共役作用素の空間

ここでは問題点をはっきりさせる例を 1 つ与えるにとどめる．

【例 4.2】　M をコンパクトで境界のない C^∞-リーマン多様体，dV を体積要素とする．体積要素を保つ可微分同相全体のなす群を $\mathcal{D}_{dV}(M)$ とする．これは C^∞-位相と呼ばれる位相で距離化群になっていると同時に無限次元のリー群にもなっている．無限小変換のなすリー環は発散量が 0 の接ベクトル場全体 $\mathcal{X}_{dV}(M)=\{X\in\mathcal{X}(M);\mathrm{div}X=0\}$ で与えられる．$\forall X\in\mathcal{X}_{dV}(M)$ は $\mathcal{D}_{dV}(M)$ の 1 径数部分群 φ_t を生成するから完備なベクトル場であり，リー括弧積でリー代数をなしている．

内積 $\langle f,g\rangle$ を $\int_N f\bar{g}dV$ で与え，E を上の L_2 (2 乗可積分)-関数全体のヒルベルト空間とする．$\forall\varphi\in\mathcal{D}_{dV}(M)$ は自然に E 上のユニタリ変換 T_φ を引き起こす．$(T_\varphi f)(x)=f(\varphi(x))$ である．

$U(E)$ を E 上のユニタリ変換全体のなす群とする．これは強位相に関して位相群になっている．$\mathcal{D}_{dV}(M)$ の 1 径数部分群 φ_t を使って T_{φ_t} を考えると，これは $U(E)$ の（強位相に関して）連続な 1 径数部分群になっている（しかし一様位相に関しては連続になっていない）．

$\tilde{\mathcal{S}}(E)$ を $U(E)$ の（強位相に関して）連続 1 径数部分群の無限小生成元の全体とする．ストーンの定理 3.2 により $i\tilde{\mathcal{S}}(E)$ は E の（非有界な）自己共役作用素の全体となる．しかし，完備なベクトル場全体のときと同様に次のことが知られているのである（[14] 参照）．**$\tilde{\mathcal{S}}(E)$ は交換子積で閉じないばかりか線形空間にもならない．さらに作用素の強位相で完備にもなっていない．**

$\mathcal{X}_{dV}(M)\subset\tilde{\mathcal{S}}(E)$ であるが，可算無限次元のヒルベルト空間 E は 1 つしかないのに M は無数にあるのだから，このようなリー環を作用素の性質だけで特徴づけることはほとんど不可能に見えるのである．

自己共役性

自己共役性はベクトル場の完備性に似ている．非有界自己共役作用素の全体 $\mathcal{H}$ は線形空間でもなければ，$i\mathcal{H}$ が交換子積で閉じることもない．「演算子の代数」で考えるというと演算子が作用する空間を最初に要求されてしまうのであるが，ここでいっている演算子の代数の意味は，最後には演算子表現を付けて演算子する代数の意味である．代数関係にのみ注目しているので「代数を考える」というほうが誤解がない．

代数的 $\mathrm{Spec}(H)$ の定義

観測値の問題はいろいろ難しいことを含んでいる．作用素 H_{obs} が与えられたとき $\mathrm{Spec}(H_{obs})$ とは $(t-H_{obs})^{-1}$ が定義できなくなるような t の集合のことであると定義されている．ところで，たとえば $\hbar i\partial_x$ が与えられたとき $\mathrm{Spec}(\hbar i\partial_x)$ は何であろうか？　実はこのような設問は不完全である．というのは $\hbar i\partial_x$ と書いただけではこれをどこに働く演算子と考えているのかわからないからである．

【例 4.3】　$\forall t\in\mathbb{R}$ に対して $(t-\hbar i\partial_x)f=0$ となる f は $Ce^{-\frac{i}{\hbar}tx}$ である．これより $\forall t\in\mathrm{Spec}(\hbar i\partial_x)$ と考えたくなる．これは $\hbar i\partial_x : C^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R})$ と見ている場合などは正しい．しかし $V_0=\{\sum_{m\in\mathbb{N}}a_m e^{\frac{i}{\hbar}mx}; a_m\in\mathbb{C}\}$ という空間を用意し $\hbar i\partial_x$ を V_0 に働く作用素と見ると，

$$(t-\hbar i\partial_x)\sum_{m\in\mathbb{N}}a_m e^{\frac{i}{\hbar}mx}=\sum_{m\in\mathbb{N}}(t-m)a_m e^{\frac{i}{\hbar}mx}$$

だから，$t\notin\mathbb{N}$ なら可逆であり $\mathrm{Spec}(\hbar i\partial_x)=\mathbb{N}$ となる．

一方 $\hbar i\partial_x$ を急減少関数（$\forall k,m\in\mathbb{N}$ に対して $\lim_{x\to\pm\infty}|x|^m f^{(k)}(x)=0$ を満たす関数）からなる空間 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に働く作用素とした場合には，$C\neq 0$ なら $Ce^{-\frac{i}{\hbar}tx}$ は急減少関数ではないから $(t-\hbar i\partial_x)f=0$ の解は $f=0$ のみである．では $(t-\hbar i\partial_x)^{-1}$ は存在するだろうか？　$\forall g\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ に対して $(t-\hbar i\partial_x)f=g$ を定数変化法で解くことができ，解は $a\in\mathbb{R}$ を任意に固定して

$$f(x)=\frac{i}{\hbar}e^{-\frac{i}{\hbar}tx}\int_a^x\frac{i}{\hbar}e^{\frac{i}{\hbar}ts}g(s)ds \tag{4.4}$$

となる．これは逆元のように見えるかもしれないが，そうだとすると a は任意だから逆元が無数に存在するという奇妙なことになる．よく見ると右辺は急減少関数ではないのでこれは完全な意味での逆写像ではない．しかし，何かうま

い関数空間を設定してやれば (4.4) 式を逆元を与える式と読めそうな気もするであろう (実はこれはうまくいかないのである).

$\mathrm{Spec}(\hbar i\partial_x)$ の問題は作用素の定義域や値域を決めてしまってからなら確定した定義は可能であるが，それらを適宜動かして考えようとするとたちまち上のような問題にぶつかるのである.

代数の元の Spec

5.2.2 項でも述べるが，逆元の問題は 1 つの H だけで決まる問題ではなく，H **をどの代数の中で考えているかを決めないと決まらないものである.**

$\mathcal{O}$ を，$\mathbb{C}$ を係数体とする 1 を含む完備位相結合代数とする．$f \in \mathcal{O}$ に対して f の**レゾルベント**と称する集合 $\mathrm{Res}(f;\mathcal{O})$ を $\{z \in \mathbb{C}; (z-f)^{-1} \in \mathcal{O}\}$ と定義する．そして f の**スペクトル集合** $\mathrm{Spec}(f;\mathcal{O})$ を $\mathbb{C}-\mathrm{Res}(f;\mathcal{O})$ と定義する (つまり f のスペクトルとは，そこでの逆元が $\mathcal{O}$ の中ではつくれないような z のことである).

作用素の Spec がその定義域や値域を明示しない限り定義できなかったのと同様に，$\mathrm{Spec}(f;\mathcal{O})$ は f を含んでいる $\mathcal{O}$ を明示しない限り意味をなさない．しかし，この定義は元を動かして考えるのに適しているので作用素を離れて量子論を考えるときに便利である.

$\mathrm{Spec}(f;\mathcal{O}) = \emptyset$ であるような f を**絶対可逆元**と呼ぶ.

4.2.3 多様体上の微分作用素環

シュレーディンガー流のやり方でまず扱うべきものは多様体 N 上の微分作用素である．N 上の線形微分作用素 $D : C^\infty(N) \to C^\infty(N)$ とは，局所座標系を使って多重添字法で $Df = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha(\boldsymbol{x})\partial_x^\alpha$ の形に書かれる作用素のことである．$\mathit{Diff}(N)$ を N 上の線形微分作用素の全体とすると，これは非可換な代数をなしている．とりあえず $\mathcal{O} = \mathit{Diff}(N)$ のように考えてみよう.

量子的現象は N ではなく $\mathcal{O} = \mathit{Diff}(N)$ で起こっているのだと考えているのである．相空間を失いはしたが，相空間上の関数環にあたるものは非可換環 $\mathit{Diff}(N)$ の形で残っていると考えるのである.

U を N の局所座標近傍，$x^1, \cdots, x^n$ を局所座標関数とする．∂_{x^i} を偏微分作用素，x^j をこの関数をかけるという作用素と見れば $\mathit{Diff}(U)$ は

$x^1, \cdots, x^n, \partial_{x^1}, \cdots, \partial_{x^n}$ を生成元とし，基本交換関係を $[x^i, \partial_{x^j}] = -\delta^i_j$ とする代数を含んでいる．しかしこの書き方はたとえば $f \in C^\infty(U)$ を「f をかける」という作用素と見たときには $[\partial_{x^j}, f] = \partial_{x^j} f$ であるので代数の元を書くときに表示の中に ∂_{x^j} を入れて $f\partial_{x^j} g$ などと書いてしまうと $\partial_{x^j} g$ は g を微分したものか，g をかけるという演算子と ∂_{x^j} という演算子を合成したものか区別しにくくなり，きわめて間違いやすい．そこで新しく記号 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ を用意し，$f(\partial_{x^j} g)$ と $f\xi_j g$ を区別することにする．

関係式は $[\xi_i, \xi_j] = 0$ $(1 \le i, j \le n)$ および $\forall f, g \in C^\infty(U)$ に対し $[f, g] = 0$, $[\xi_j, f] = \hbar i \partial_{x^j} f$ とする．$\hbar$ は正の定数としている．$\hbar i$ のところを 1 としてもよいのだが後のほうの記号の使い方に合わせてある．

> $\hbar$ はきわめて小さい正の数と思われている．単位系を変更すればこれを 1 と思っても数学的には何も変わらないのだが，近似理論的に考えるときには大切なことで，何もかも $\hbar$ で展開して $\hbar^3$ 以下を切り捨てるような理論でも十分意味があるとする考え方を生むのである．

すると，ξ_j 自身は作用素ではなくただの記号ということになるが，$C^\infty(U)$ と $\xi_1, \cdots, \xi_n$ と上の交換関係式だけから生成される代数を**ワイル代数**と呼んで $W_{2n}(U)$ と書いておく[1]．さらにこの代数の積を $a{*}b$ のように $*$ で書くことにする．ただし $f, g \in C^\infty(U)$ のときは $f{*}g = fg$ とする．$W_{2n}(U)$ の元は多重添字で $\sum_\alpha f_\alpha \boldsymbol{\xi}^\alpha$ のように書かれる．$W_{2n}(U)$ は線形空間としては余接束空間 T^*_U 上の $\xi_1, \cdots, \xi_n$ に関する多項式全体の空間と同型である．

別の局所座標近傍 V，その上の座標関数を $y^1, \cdots, y^n$ とする．∂_{y^i} に対応するものとして $\eta_1, \cdots, \eta_n$ を用意し，上と同様に $W_{2n}(V)$ をつくる．$U \cap V \neq \emptyset$ のときには共通部分で $\partial_{x^i} = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \partial_{y^k}$ だから共通部分では $\xi_i = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \eta_k$ という関係で結ばれていると約束する．合成関数の偏微分の公式から

$$\begin{aligned}[\xi_i, f(\boldsymbol{x})] &= \hbar i \partial_{x^i} f = \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \hbar i \partial_{y^k} f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y})) \\ &= \frac{\partial y^k}{\partial x^i} [\eta_k, f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}))] = [\frac{\partial y^k}{\partial x^i} \eta_k, f(\boldsymbol{x}(\boldsymbol{y}))],\end{aligned}$$

---

1) 次節参照．

$$[\xi_i,\xi_j]=[\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\eta_a,\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\eta_b]=\frac{\partial y^a}{\partial x^i}[\eta_a,\frac{\partial y^b}{\partial x^j}]\eta_b+\frac{\partial y^b}{\partial x^j}[\frac{\partial y^a}{\partial x^i},\eta_b]\eta_a$$
$$=\hbar i\frac{\partial y^a}{\partial x^i}\frac{\partial x^k}{\partial y^a}\frac{\partial^2 y^b}{\partial x^k\partial x^j}\eta_b-\hbar i\frac{\partial y^b}{\partial x^j}\frac{\partial x^\ell}{\partial y^b}\frac{\partial^2 y^a}{\partial x^\ell\partial x^i}\eta_a=0$$

となり共通部分で関係式も移り合っているのでワイル代数として同型となる．したがってこの関係で局所的に定義された代数を貼り合わせて考えることができる．できあがったものを $W_{2n}(N)$ と書くことにしよう．

また，$\hbar$ を形式的な変数として扱って何もかも $\hbar$ の冪で展開して扱うこともできる．このように考えているときの $W_{2n}(N)$ を $W^\hbar_{2n}(N)$ と書いて区別しておく．$W_{2n}(N)$ と $W^\hbar_{2n}(N)$ とは同じように見えるかもしれないが大きな違いがあることが下の例 4.4 でわかる．しかし $\hbar$ を正数として扱っているときには $\xi'_i=\frac{1}{\hbar i}\xi_i$ と変数変換すれば $\hbar i=1$ としているのと何も変わらない．

【例 4.4】 両辺が同じ微分方程式を同じ初期値で満たしていることから $[e^{t\xi_i},f(x^i)]=f(x^i+\hbar t)$ であることがわかるが，$\hbar$ が正数のときには右辺は $|t|>>0$ では（f の定義域から外れて）定義できないことがある．ところが，$\hbar$ の形式的冪級数に展開して考える立場だと，$f(x^i+\hbar t)=\sum_k\frac{1}{k!}(\hbar t)^k f^{(k)}(x^i)$ であるから f が C^∞ でありさえすれば定義できる．

真空表現

ξ_j 自身はただの記号だから ξ_j を偏微分作用素と思うときのルールを決めておかねばならない．そのために次のように考える．

まず「真空」(vacuum) ϖ_N と称する記号を用意する．そして $\forall\xi_i$ に対して $\xi_i{*}\varpi_N=0$ と約束する．この約束は N の局所座標系の取り方によらずに意味を持つから ϖ_N は多様体 N で定義されているものである．

この約束では $W_{2n}(N)*\varpi_N=C^\infty(N)*\varpi_N$ となることが容易にわかる．$W^\hbar_{2n}(N)$ を考えているときには $W^\hbar_{2n}(N)*\varpi_N=C^\infty(N)[[\hbar]]*\varpi_N$ となる．

さらに $\forall f\in C^\infty(N)$ に対して次のようになる：

$$\xi_i{*}f{*}\varpi_N=[\xi_i,f]{*}\varpi_N=\hbar i(\partial_{x^i}f){*}\varpi_N,\quad x^j*f*\varpi_N=(x^jf){*}\varpi_N,$$
$$\xi_i{*}\xi_j{*}f{*}\varpi_N=-\hbar^2(\partial_{x^i}(\partial_{x^j}f)){*}\varpi_N.$$

このようにすることを代数 $W_{2n}(N)$ の元の**真空表現**という．$Diff(N)$ は代数 $W_{2n}(N)$ を真空表現して得られた代数といってもよい．**代数の部分と，その表現とに分けて考えているところ**がポイントである．

ところで $W_{2n}(N)$ で扱えるのは $C^\infty(N)$ に作用する微分作用素だけであるが，古典的相空間では $e^{\hbar^2\sum p_i^2}$ とか $(1+\sum\hbar^2 p_i^2)^{-1}$ のようなものも自由に考えていたわけだからこれも定義したいものである．これはどうすればよいのだろうか？　この問題の解答は第 8 章で与えるが，$\hbar$ の形式的冪級数で考える立場だと $|\xi|^2=\sum\xi_i^2$ として

$$e^{|\xi|^2}=1+\frac{1}{1!}|\xi|^2+\frac{1}{2!}|\xi|^4+\cdots,\quad (1+|\xi|^2)^{-1}=1-|\xi|^2+|\xi|^4-|\xi|^6+\cdots \tag{4.5}$$

のように考えて $\hbar^2$ で展開した形で扱うことができる．つまり

$$\big(1-\sum_i\hbar^2(\partial_{x^i}^2)\big)^{-1}=\sum_k\hbar^{2k}(\sum_i\partial_{x^i}^2)^k$$

のようにして $C^\infty(U)[[\hbar]]*\varpi_N$ に作用する演算子として扱うのである．一見無限階の微分作用素だが $\hbar^\ell$ の係数だけに注目していると無限階の微分作用素は現れないからこれで十分計算ができるのである．ものごとをすべてこの流儀で考えるやり方に慣れてしまえば計算は簡単になり，しかもこれでかなりの感覚が得られるのである．しかし，これはいったい何なのであろうか？　これは，数学では擬微分作用素（8.3.2 項参照）として理解されるものになっているのである．

4.3　μ-制御代数（非可換世界の手頃なモデル）

$\mathcal{O}$ を設定しないことには世界は始まらないのだが，これを不確定性原理と矛盾しないように設定するには何か非可換な代数として設定すればよい．非可換な代数から点をつくるのは難しいから，このような対象の「状態全体」は点集合と理解してはいけないことになるのである．

上で述べてきたような問題を一気に考えなくてはならないところにきているのであるが，そのために，前節とのつながりがやや悪いのだが，いきなり非可換の $\mathcal{O}$ を掲げてしまうことにする．しかし，われわれの素朴な古典世界とのつながりが見えるように「制御子」と称する元 μ を 1 つ考える．そして $\mu=0$ で見える世界が古典的世界であると考える．この元はこの目的のために考えるだけのものだから，物理的な深い意味はない．

K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ とし，K を係数体とする 1 を含む σ-フレシェ結合代数 $(\mathcal{O};*)$ を考える．数学の記号の意味は次を見てもらいたい．

(A.0) $\forall x \in \mathcal{O}$ で $1{*}x = x{*}1 = x$
(A.1) **制御子**と称する $\mathcal{O}$ の元 μ があって $[\mu, \mathcal{O}] \subset \mu{*}\mathcal{O}{*}\mu$
(A.2) $[\mathcal{O}, \mathcal{O}] \subset \mu{*}\mathcal{O}$
(A.3) $\mu{*}\mathcal{O}$ は閉部分空間であり，その補空間 B が存在
(A.4) $\mu{*} : \mathcal{O} \to \mu{*}\mathcal{O}$, ${*}\mu : \mathcal{O} \to \mathcal{O}{*}\mu$ が線形同型

$f, g \in \mathcal{O}$ に対し $[f, g] = f{*}g - g{*}f$ を**交換子積**と呼ぶ．(A.1) は $\forall a \in \mathcal{O}$ に対して $b \in \mathcal{O}$ があって，$[\mu, b] = \mu{*}b{*}\mu$ と書けるという意味である．(A.2) は $\forall a, b \in \mathcal{O}$ に対して $c \in \mathcal{O}$ があって，$[a, b] = \mu{*}c$ と書けるという意味である．

(A.1) は特別な場合には $[\mu, \mathcal{O}] = \{0\}$ となることもある．(A.3) は位相まで考えての補空間の意味であるから B は線形閉部分空間で $\mathcal{O} = B \oplus \mu{*}\mathcal{O}$ となっている．ただし，B の選び方は一意的ではない．(A.4) は μ を左からかける $a \to \mu * a$ という演算，μ を右からかける $a \to a * \mu$ という演算がどちらも位相線形同型写像であるというものである．

4.3.1　両側イデアル，商代数，冪展開

上の公準から自然にわかることを述べる．まず (A.1) により，

$$a * \mu = \mu * a - \mu * b * \mu = \mu * (a - b * \mu)$$

だから，$\mathcal{O}{*}\mu \subset \mu{*}\mathcal{O}$ がわかるが，同様に $\mu{*}\mathcal{O} \subset \mathcal{O}{*}\mu$ でもあるから，$\mu{*}\mathcal{O} = \mathcal{O}{*}\mu$ である．これより $\mathcal{O}{*}(\mu{*}\mathcal{O}){*}\mathcal{O} \subset \mu{*}\mathcal{O}$ であることがわかる．一般に $\mathcal{O}{*}\mathcal{I}{*}\mathcal{O} \subset \mathcal{I}$ となる線形部分空間 $\mathcal{I}$ を $\mathcal{O}$ の**両側イデアル**と呼ぶが，上のことは $\mu{*}\mathcal{O}$ が両側イデアルということであり，商空間 $\mathcal{O}/\mu{*}\mathcal{O}$ には $(\mathcal{O}; *)$ から自然に代数の構造が誘導される（このようにして得られる代数を**商代数**と呼ぶ）．

(A.2) により，$a * b - b * a \in \mu{*}\mathcal{O}$ であるから，$\mathcal{O}/\mu{*}\mathcal{O}$ に誘導された代数は可換代数である．

(A.3) により，B は自然に商空間 $\mathcal{O}/\mu{*}\mathcal{O}$ と位相線形同型であるから，この同型を経由して $\mathcal{O}/\mu{*}\mathcal{O}$ の代数構造をそっくり B に移せば B に位相可換代数の構造が入る．この可換代数を $(B; \cdot)$ と書いておき，これが古典的相空間（状態空間）の点をつくりだしている可換代数であると考える．

このように考えれば，不確定性があるといってもそれは $\mathcal{O}$ 自身をどこかの相空間上の関数空間とは考えないだけで，μ を無視した古典的世界では相空間を考えてよいことになり，古典力学を劇的に変えないですむのである．

第 1 章では $\mathbb{R}$ への全単射準同型を「点」と呼んだが，ここでは $(B;\cdot)$ から $\mathbb{R}$，または $\mathbb{C}$ への**連続な**全単射準同型を**古典的点**と呼んでおく．古典的点の全体を M_B と表す．第 1 章でやったように B の元がすべて連続に見えるように位相を入れることで，M_B は T_2-分離公理を満たす位相空間となる．

$\forall f \in B$ に対して，$D(f) = \{p \in M_B; p(f) \neq 0\}$ とし，$D(f)$ の閉包 $\bar{D}(f)$ を f の**台** (support) と呼び，$\mathrm{supp} f$ と書く．

【例 4.5】 M を C^∞-多様体，$\mathcal{O} = C^\infty(M \times \mathbb{R})$ とし，C^∞-位相を入れる．これで，$\mathcal{O}$ は σ-フレシェ代数になる．$\mathbb{R}$ の座標関数を μ とする．$B = C^\infty(M)$ とすると，$[\mu, \mathcal{O}] = \{0\}$, $[\mathcal{O}, \mathcal{O}] = \{0\}$ の自明な μ-制御代数になる．

> μ-制御代数ではまだ古典的「点」が見えており，しかも
> 何もかも μ-冪展開して考えている限りでは安定している．

任意の結合代数 $\mathcal{O}$ で**対称積**，**交換子積**を次のように定義する：

$$a \odot b = \frac{1}{2}(a * b + b * a), \qquad [a, b] = a * b - b * a$$

これらは一般に結合律を満たさない演算である．しかし，$\mathcal{O}$ は交換子積に関してリー代数をなし，対称積に関しては $\mathcal{O}$ はジョルダン代数（[43] 参照．p.128 も参照）と呼ばれるものになる．$a * b = a \odot b + \frac{1}{2}[a, b]$ であり，

$$a \odot (b \odot c) - (a \odot b) \odot c = \frac{1}{4}[[a, c], b] \tag{4.6}$$

である．とくに $[[a, c], b] = 0$ ならば対称積は a, b, c について結合律を満たす．

補題 4.3 任意の μ-制御代数において，$\mu^k * \mathcal{O}$ は閉両側イデアルであり，$[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{O}]] \subset \mu^2 * \mathcal{O}$ である．とくに $\mathcal{O}/\mu^2 * \mathcal{O}$ は自然に誘導される対称積によって可換結合代数となる．

> この可換代数が古典的相空間上の関数空間だと考えるのである．

【例 4.6】 外微分環 $\mathcal{F}_M^*$ を係数環として，μ の形式的冪級数

$$\omega_0 + \mu\omega_1 + \mu^2\omega_2 + \mu^3\omega_3 + \cdots, \quad \omega_k \in \mathcal{F}_M^*$$

の全体を考えこれを $\mathcal{F}_M^*[[\mu]]$ とする．これを無限直積 $\prod \mathcal{F}_M^*$ と見て直積位相を入れると，σ-フレシェ代数となる．μ はすべての元と可換として $\wedge$-積を自然に拡張すると $\mathcal{F}_M^*[[\mu]]$ は σ-フレシェ代数となる．$\mathcal{O} = \mathcal{F}_M^*[[\mu]]$ とし，

$$\omega * \omega' = \begin{cases} \omega{\wedge}\omega', & \omega \text{ または } \omega' \in \mathcal{F}_M^{(ev)} \\ \mu\omega{\wedge}\omega', & \omega,\ \omega' \in \mathcal{F}_M^{(od)} \end{cases}$$

と（非可換になるほうに μ がつくように）定義し，積を分配律で拡張すると $\mathcal{O} = \mathcal{F}_M^*[[\mu]]$ は μ-制御代数になり，$[\mathcal{O}, [\mathcal{O}, \mathcal{O}]] = \{0\}$ となる．$\mathcal{O}/\mu{*}\mathcal{O}$ は自然に誘導される積によって $(\mathcal{F}_M^*; \odot)$（1.3.3 項参照）と同型になる．

μ-冪展開

(A.3) より $\mathcal{O} = B \oplus \mu{*}\mathcal{O}$ であるから，この性質を入れ子式に何度も使うと任意の自然数 N に対して

$\mathcal{O} = B \oplus \mu{*}\mathcal{O}$ というのは，自分の中に自分と同型なものが「入れ子」になって入っているという構造である．

$$\mathcal{O} = B \oplus \mu{*}B \oplus \mu^2{*}B \oplus \cdots \oplus \mu^{N-1}{*}B \oplus \mu^N{*}\mathcal{O} \tag{4.7}$$

という分解が得られる．この分解を**フィルタリング** (filtering) と呼ぶ．これより $\forall f, g \in B$ に対して $f{*}g$ は

$$f{*}g = f{\cdot}g + \mu{*}\pi_1(f,g) + \mu^2{*}\pi_2(f,g) + \cdots + \mu^k{*}\pi_k(f,g) + \cdots \tag{4.8}$$

のように分解できる．$(f,g) \to \pi_k(f,g) \in B$ は $B \times B$ から B への連続双線形写像である．$f{\cdot}g$ は fg のように $\cdot$ を省略して書くことが多い．

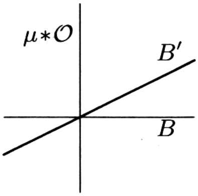
> (4.8) 式さえわかれば，$(\sum \mu^k f_k){*}(\sum \mu^l g_l)$ は計算できる．

$\bigcap_k \mu^k * \mathcal{O} = \{0\}$ であるような μ-制御代数を**準解析的** μ-制御代数と呼ぶ．準解析的 μ-制御代数は上の分解で，B を係数環とする μ の形式的冪級数環 $B[[\mu]]$ の中に自然に埋め込まれている．とくに $\mathcal{O} = B[[\mu]]$ のときに**形式的** μ-制御代数と呼ぶ．また，$[\mu, \mathcal{O}] = \{0\}$ であり，(4.8) 式の μ に数 z を代入しても z に関して収束半径が > 0 となる場合，**解析的** μ-制御代数と呼ぶ．

> **量子論的実態**
>
> 量子論では $*$-積のほうが実態と考えられ，可換積のほうはそれを表示するために使われる，いわば**補助線**の役目しか負っていないのである．

フィルタリングの変更，同型写像

(4.8) 式のところで使われている π_k はむろん，補空間 B の選び方に依存する．



$\mu*L : B \to \mu*\mathcal{O}$ を連続線形写像とし，B のかわりに $B' = \{b + \mu*L(b); b \in B\}$ を選ぶこともできる．$\varphi(b) = b + \mu*L(b)$ とおくと，$B' = \varphi(B)$ であり，$f, g \in B'$ について $\varphi(\varphi^{-1}(f)*\varphi^{-1}(g))$ を計算することになるから，π_k は複雑に変化するが，始めのほうの項は楽に計算できて次のようになる．

補題 4.4　$L : B \to B$ を連続線形写像とし，$B' = \{b+\mu^k*L(b); b \in B\}$, $k \geq 2$ としたときには逐次代入法で

$$\varphi^{-1}(b) = b - \mu^k*L(b) + \mu^{2k}*L^2(b) - \cdots$$

となるから，$\pi_0 \sim \pi_{k-1}$ は変化せず，π_k の部分が次のように変化する：

$$\pi'_k(f,g) = \pi_k(f,g) - \delta_{\pi_0}L(f,g) \ {\scriptstyle (=\pi_k(f,g) - fL(g) + L(fg) - L(f)g)}.$$

$[\mu, \mathcal{O}] = \{0\}$ の場合には，もう 1 つ先まで計算でき，π_{k+1} の部分が

$$\pi'_{k+1}(f,g) = \pi_{k+1}(f,g) - d_{\pi_1}L(f,g)$$
$${\scriptstyle (=\pi_{k+1}(f,g) - \pi_1(f,L(g)) + L(\pi_1(f,g)) - \pi_1(L(f),g))}$$

のように変化する（$\delta_{\pi_0}L$, $d_{\pi_1}L$ の一般の定義については 9.1 節参照）．

証明　次のように計算する：

$$\begin{aligned}
\varphi^{-1}(f)*\varphi^{-1}(g) &= (f - \mu^k*L(f) + \cdots)*(g - \mu^k*L(g) + \cdots) \\
&= \sum_{i=0}^{k-1} \mu^i \pi_i(f,g) + \mu^k \pi_k(f,g) + \mu^{k+1}\pi_{k+1}(f,g) \\
&\quad - \mu^k(fL(g) + \mu*\pi_1(f,L(g)) + L(f)g + \mu*\pi_1(L(f),g)) \\
&\quad\quad + \mu^{k+2}(\cdots).
\end{aligned}$$

これに φ をほどこすと，上の形になる．　　　　（証明終わり）

補空間 B の選び方を変更することを，**フィルタリングの変更**という．

このフィルタリングの変更というのは $*$-積を変えているのではなく，その表示のされ方を変えているだけである．しかし，B を B' に変えるということは，そこに誘導される可換積が（同型ではあるが）変わってしまうので**固定した可換代数を基礎にして拝点主義をとっていると考えにくくなる**のである．

注意 4.2 μ^{-1} が考えられるときには，これの逆元はむろん μ であるが μ を形式的変数と見て何もかも μ の冪で展開して考えているときには，$\forall a \in \mathbb{C}$ に対して

$$(a-\mu^{-1})_*^{-1} = -\mu * \sum (a\mu)_*^k$$

であるから，$a - \mu^{-1}$ も可逆としなければならない．つまり，$\mathrm{Spec}(\mu^{-1}) = \emptyset$ または $= \{\infty\}$ としなければならない．このような元は**絶対可逆元**と呼ばれていた．

$\pi_m : B \times B \to B$ が**局所性を持つ**とは，$\forall f, g \in B$ に対して，台 (support) について $\mathrm{supp}\, \pi_m(f,g) \subset \mathrm{supp}\, f \cap \mathrm{supp}\, g$ が成立することをいう．

定義 4.3 μ-制御代数 $\mathcal{O}$ が**局所性を持つ**とは，π_m, $m = 1, 2, 3, \cdots$ が局所性を持つように補空間 B が選べる場合をいう．

多くの μ-制御代数が局所性を持つことを後で示す．局所性という言葉は抽象的だが，**局所性のある作用素 = 微分作用素**（[41] 参照）という定理があるから，大切な概念である．

次の性質が出てくるように補空間 B が選べる場合が多い：

$$\pi_k(f,g) = (-1)^k \pi_k(g,f) \quad \text{（交代条件）}. \tag{4.9}$$

このような μ-制御代数を**正則** μ-制御代数と呼ぶ．正則 μ-制御代数では π_1 は**交代双微分**である．

これまでは μ-制御代数 $\mathcal{O}$ を 1 つ固定して話をしてきたが，いろいろな μ-制御代数 $\mathcal{O}$ を同時に含むような対象を用意しておいて，一方から他方へ移ったり変換したりする作業が必要になる場合がある．たとえば $\mathcal{O}[f^{-1}]$ といった局所化を行なう場合などである．$\psi(\mu) = \mu$ が成立するような同型写像 $\psi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathcal{O}'$ を μ-**同型**と呼ぶ．

4.3.2 特性ベクトル場

(A.1) より $[\mu, a] = \mu * b * \mu$ だが，(A.4) より，b は a によって一意的に決まる．(A.4) より仮想的に μ^{-1} を考えてよいが，$\mu^{-1} * \mu = 1$ だから $[\mu^{-1} * \mu, a]$

$= [\mu^{-1}, a] * \mu + \mu^{-1} * [\mu, a] = 0$ であることを考えて

$$[\mu^{-1}, a] = -\mu^{-1} * [\mu, a] * \mu^{-1} \tag{4.10}$$

と定義する．さらに $\mathrm{ad}(\mu^{-1})(a) = [\mu^{-1}, a]$ と定義する．このような記号にするのは，一般に $[f, a]$ を $\mathrm{ad}(f)(a)$ と書く習慣があるからである．結果的には μ^{-1} があると思って $[\mu^{-1}, a * b]$ を計算したのと同じで，

$$\mathrm{ad}(\mu^{-1})(a{*}b) = \mathrm{ad}(\mu^{-1})(a) * b + a * \mathrm{ad}(\mu^{-1})(b) \tag{4.11}$$

が成立する．(4.7) 式の分解にしたがって，$\forall f \in B$ に対して

$$\mathrm{ad}(\mu^{-1})(f) = \xi_0(f) + \mu{*}\xi_1(f) + \cdots, \quad \xi_k(f) \in B$$

と分解される．(4.11) 式より μ^0 のところを見ると $\xi_0(fg) = \xi_0(f)g + f\xi_0(f)$，つまり ξ_0 は $(B; \cdot)$ の微分ということがわかる．$B = C^\infty(M)$ のときには微分は接ベクトル場とも呼ばれていたので，その用語を使って ξ_0 を**特性ベクトル場**と呼ぶが，係数は K なので M が実多様体で $K = \mathbb{C}$ だとすると，本当の接ベクトル場でない場合がある．実多様体では積分曲線が考えられるのは実ベクトル場の場合だけである．

リウヴィル括弧，ポアソン括弧

$\{f, g\} = \pi_1(f, g) - \pi_1(g, f)$ とおく．$\{f, g\} = -\{g, f\}$ は明らかで，結合代数で一般に成立する公式 $[A, B{*}C] = [A, B]{*}C + B{*}[A, C]$ を使うと

$$\{f, gh\} = g\{f, h\} + \{f, g\}h, \quad \text{つまり} \quad \{f, \ \} \text{ は } (B; \cdot) \text{ の微分}$$

となることがわかる．$\{,\}$ は交代（= 歪対称）だから，$\{,\}: B \times B \to B$ は**交代双微分**であるといわれる．一方，上の恒等式より容易に

$$[\mu^{-1}{*}a, \mu^{-1}{*}b] = \mu^{-2}{*}[a, b] + \mu^{-1}\mathrm{ad}((\mu^{-1})(a){*}b + a{*}\mathrm{ad}(\mu^{-1})(b)) \tag{4.12}$$

であるから，$\mu^{-1}{*}\mathcal{O}$ はリー代数になる．さらに，

$$[\mu^{-1}{*}a, b] = [\mu^{-1}, b]{*}a + \mu^{-1}{*}[a, b]$$

であり，$\mathrm{ad}(\mu^{-1}{*}a)$ は $\mathcal{O}$ から自身への線形写像となるが，実は $(\mathcal{O}; *)$ の微分になっていることが容易にわかる．

これらを $\forall f, g \in B$ に対して考え，(4.7) 式の分解にしたがって

$$\mathrm{ad}(\mu^{-1} * f)(g) = X_f^{(0)}(g) + \mu * X_f^{(1)}(g) + \cdots, \quad X_f^{(k)}(g) \in B$$

とおく．$X_f^{(0)} : B \to B$ は微分であり，さらに次もわかる：

$$X_f^{(0)}\{g, h\} = \{X_f^{(0)}(g), h\} + \{g, X_f^{(0)}(h)\}.$$

$\{X_f^{(0)}; f \in B\}$ は微分の合成による交換子積で閉じて

$$[X_f^{(0)}, X_g^{(0)}] = f\xi_0 g - (\xi_0 f)g + \{f, g\}$$

となる．$X_1^{(0)} = \xi_0$ である．次のことは前章のポアソン代数，ヤコビ代数の定義を思い出せば，簡単であろう（ただし，係数体は K になっている）．

命題 4.2　$(B, \xi_0, \{\ ,\ \})$ はヤコビ代数である．とくに，

$$\{f, g\}_c = f\xi_0 g - (\xi_0 f)g + \{f, g\}$$

とすると $(B, \{\ ,\ \}_c)$ はリー代数になっている．また，$\xi_0 = 0$ ならば $(B, \{\ ,\ \})$ はポアソン代数である．

ヤコビ代数はポアソン代数と密接な関係がある．そこで（多様体を仮定しないで）ヤコビ代数から始めてポアソン代数を構成することを考えてみよう．

r を変数として $\mathcal{O}$ 係数の r のローラン (Laurent) 多項式というのを

$$f_{-k}r^{-k} + \cdots + f_{-1}r^{-1} + f_0 + f_1 r + \cdots + f_s r^s, \quad f_i \in \mathcal{O}$$

のように r の冪で展開されるものと定義する．これは自然に環としての構造を持つのでこういうものの全体をローラン多項式環と呼んで $\mathcal{O}[r, r^{-1}]$ のように書く．この上にポアソン括弧積 $\{\ ,\ \}_{\mathfrak{p}}$ を定義するのである：

$$\{r, f\}_{\mathfrak{p}} = -\{f, r\}_{\mathfrak{p}} = \xi_0(f), \quad \{f, g\}_{\mathfrak{p}} = r^{-1}\{f, g\}, \quad \forall f, g \in \mathcal{O}.$$

$\{\ ,\ \}_{\mathfrak{p}}$ を双微分として $\mathcal{O}[r, r^{-1}]$ に拡張するには

$$\begin{aligned}\{r^m f, r^n g\}_{\mathfrak{p}} &= r^{m+n}\{f, g\}_{\mathfrak{p}} + r^m\{f, r^n\}_{\mathfrak{p}} g + r^n f\{r^m, g\}_{\mathfrak{p}} \\ &= r^{m+n-1}\big(\{f, g\} + mf\xi_0(g) - n\xi_0(f)g\big)\end{aligned}$$

とすればよいわけだが，こうすると次の補題が成り立つ．

補題 4.5 $(\mathcal{O}[r, r^{-1}]; \{\ ,\ \}_{\mathfrak{p}})$ はポアソン代数である．

証明 $\{\ ,\ \}_{\mathfrak{p}}$ は双微分となったから，ヤコビ恒等式を試せばよい．巡回和 $\sum_{(f,g,h)} \{f, \{g,h\}_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}}$ は f, g, h それぞれについて微分 (derivation) の性質を持っていることがわかる（3 重微分）．ゆえにヤコビ恒等式は $\mathcal{O}[r, r^{-1}]$ の生成元のところでわかればよい．(f, g, h) が (r, f, g) とか (r, r, g) の場合のヤコビ恒等式は簡単に確かめられる．f, g, $h \in \mathcal{O}$ のときには

$$\{f, \{g,h\}_{\mathfrak{p}}\}_{\mathfrak{p}} = \{f, r^{-1}\{g,h\}\}_{\mathfrak{p}} = r^{-2}\xi(f)\{g,h\} + r^{-2}\{f, \{g,h\}\}$$

となるが，$\sum_{(f,g,h)} (\{f, \{g,h\}\} + \xi(f)\{g,h\}) = 0$ が $\{\ ,\ \}_c$ に関するヤコビ恒等式から得られる．（証明終わり）

もとの代数 $\mathcal{O}$ は $r = 1$ とおくと復元される．r をエネルギー関数のように思っているときには等エネルギー面に簡約してもとの代数が得られていると解釈できるわけである．

補題 4.5 と同様のことが μ-制御代数でもわかる．$0 < \varepsilon < 1$ とし，$\mathcal{O}[r; \varepsilon]$ を開区間 $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ から $\mathcal{O}$ への C^∞-写像の全体とする．$(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ の座標関数を r とすると $r, r^{-1} \in \mathcal{O}[r; \varepsilon]$ だから等式

$$\mathcal{O}[r; \varepsilon] = r\mathcal{O}[r; \varepsilon] \quad \text{（頭を切り替えるときに大切な等式）}$$

が成立する．セミノルム系をうまく定義して $\mathcal{O}[r; \varepsilon]$ は σ-フレシェ空間になる．さらに $\mu = \hbar i r^{-1}$ とおき，$\hbar$ は中心 (center) に属するとする．すると，$*$-積は自然に $\mathcal{O}[r; \varepsilon]$ まで拡張される．$\mathcal{O}[r; \varepsilon] = B[r; \varepsilon] \oplus \hbar i \mathcal{O}[r; \varepsilon]$ は容易であろう．次のことがわかる．

命題 4.3 $(\mathcal{O}[r; \varepsilon]; *)$ は $\hbar i$ を中心の元とする $\hbar i$-制御代数である．

4.3.3 変形理論による量子化の問題

μ-制御代数を μ に関して展開してやると始めのほうの項にポアソン代数とかヤコビ代数とか外微分環といった，古典微分幾何（テンソル解析）で理解できる構造が出てくることがわかる．このような古典的構造は μ-制御代数というものとは無関係に昔から知られていたものである．

とすると，当然「ポアソン代数，ヤコビ代数，外微分環といった古典微分幾何的構造は背後に μ-制御代数を持っていて，われわれはその第 1 次近似を見ているのではあるまいか」という疑問が湧いてくるであろう．これが，deformation quantization（変形量子化 = 変形理論による量子化）の立場での問題意識である．これは，ハイゼンベルグ，シュレーディンガーの量子化の処方に代わる第 3 の処方箋とでもいうべきもので，もっと明確に問題を述べれば，**ポアソン代数，ヤコビ代数，外微分環といった古典微分幾何的構造に対して，これを第 1 次近似として含むような μ-制御代数を構成せよ**となる．むろんこの問題に答えるためだけなら，構成するものは形式的 μ-制御代数でよい．別の角度からいえばこの問題の解答は一意的ではない．

これは，伝統的量子論が「何もかも自己共役作用素の中で組み立てるべきだ」としているのに対して，**いったん作用素を捨てて**位相代数（またはその拡張）の中で理論をつくっておいて，最後に作用素表現論の付けられる部分を取り出して物理理論にしようとしている立場である（この場合取り出し方も一意的ではない）．

初期量子論は「一般力学系に似てくるように」を指標として理論がつくられたという経緯がある．変形量子化における問題意識はこのような歴史的背景からも生まれる．この考え方は F.Bayen, M.Flato, C.Fronsdal, A.Lichnerowicz, D.Sternheimer[1] に始まるものであるが，微分幾何学との関係を考えやすくしているので，微分幾何をやっていた者には入りやすい考え方である．この立場では Spec は作用素として与えられる 1 つの元で決まるものではなく，代数として閉じたものを選んだときにその**代数が決めるものである**と考えていることが特徴的なことで，最初に代数を与えて始まる C^*-環の考え方とは一線を画する．

最近の M. Kontsevich[15] の結果は形式的な場合の変形量子化の問題に肯定的に答えているのであるが，μ を形式的変数とした量子化は（作用素表現が付けにくいので）物理理論とはみなされないのである（したがって，変形量子化の理論は**第 2 世代**（形式的変数 $\Rightarrow$ 実変数）へ突入したのである）．

物理理論との関係

μ を形式的変数とした量子化は将来 μ が形式的変数でなくなったときにどのようなことが起こるのかを知る探り針でしかない．

したがって，この本ではこの後 μ を形式変数とは見ない立場に移行するので

あるが，これがきわめて難しい問題を引き起こすのである．まず，次章では結合律が破れるという現象が観察される．さらに第 7 章では極地元と称する，点集合論には現れない **2 価の元**が登場する．さらに線形の発展方程式にも一方向きだけ考えないと結合律に矛盾する現象が出てくるのである．

ここでは，前に定義した齟齬束の概念が重要になってくるのであるが，齟齬束を幾何学の中心的概念と認識する機運はまだ熟していない．筆者は場の理論の発散の困難を救うためにはこのような原始的なところから立ち上がってくる理論が必要だと見ているのであるが，いまのところ（イメージは先行するが論理が追い付かず）いっきに全貌を明かすことはできない．

第 5 章　量子的世界の取り扱い

前章までは完備位相代数が先に与えられているとして，そこから出発したのだが，この章では考え方を逆にして，積の公式がわかっている簡単な代数から出発してそれにいろいろな位相を入れて完備化し σ-フレシェ空間を考える．第 2 章の終わり，前章 4.2.3 項に現れたハイゼンベルグ代数とかワイル代数に的をしぼり，それを拡張した非可換系を考え，そこで何が起こるかを見る．つまり，**代数を知るためにいったんその代数の外に出るという**昔からある方法をとるのである．

非可換結合代数のつくり方

やり方は 2 通りある．1 つはよく知っている代数の上に別の積公式を書いてしまうもの．もう 1 つは自由テンソル代数を関係式のイデアルで割って（商空間をつくって）つくるものである．

自由テンソル代数に位相を入れて σ-フレシェ代数ができれば，関係式のイデアルの閉包で割って商代数をつくれば補題 4.1 によっていろいろな σ-フレシェ代数をつくることができる．これは汎用性の高い方法のように見えるが，実はうまく働く場合は少ないことがわかる．

もう 1 つの方法で拡張するためにはまず元の表示を一意的にして，それを使って新しい積と位相を入れて完備化するという方法をとる．しかしこのように拡張された非可換系は一般には代数にならず，後で述べる（5.2.1 項）両側 A'-加群といったものにしかならない．ここでの問題はその中からどのようにして μ-制

御代数のような代数をつかみだすかということである．

この章で述べる定理は考え方としては大切だが後のほうではあまり使われないので証明は与えていないものが多いから，そのつもりで読んでもらいたい．まず，2.2.4 項を思い出しておこう．(難しいと思う人はこの節を飛ばして，次節非可換積の構成のところから始めてもよい．)

5.1 位相付き自由テンソル代数と商代数

$X_0, X_1, \cdots, X_n$ で生成される自由テンソル代数 $\mathcal{T}^{n+1}$ は結合代数だから，これが位相代数となるような位相を $\mathcal{T}^{n+1}$ に入れよう．わざわざ $n+1$ にしているのは X_0 を後で μ と読みたいからである．2.2.4 項の記号を使えば $\mathcal{T}^{n+1}$ は $\mathcal{T}^{n+1} = \Sigma_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{T}^{n+1}(k)$ のように直和空間として表せるからこれを直積空間 $\prod_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{T}^{n+1}(k)$ に埋め込んで考えることができる．

5.1.1 単語位相

$\prod_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{T}^{n+1}(k)$ を（$(n+1)$-次元ベクトル空間 V からつくる）**形式的自由テンソル代数**と呼ぶ．この元は

$$T = \sum\nolimits_{|\alpha|\geq 0} t_\alpha X_\alpha \,(\text{無限和}), \quad t_\alpha \in \mathbb{C} \tag{5.1}$$

のように書かれる．まず $\prod_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{T}^{n+1}(k)$ に直積位相を入れて σ-フレシェ空間にする．すると $\prod_{k\in\mathbb{N}}\mathcal{T}^{n+1}(k)$ は積 $\otimes$ に関して σ-フレシェ代数になることが容易にわかる．

$\mathcal{T}^{n+1}$ に上で与えたものより強い**単語位相**と呼ばれる位相を入れよう．まず正の数字の組 (τ_0, τ), (s_0, s) を

$$\tilde{\tau} = (\tau_0, \tau),\ \tilde{s} = (s_0, s) \tag{5.2}$$

のように略記する．先頭の τ_0, s_0 は後の 5.1.2 項では $X_0 = \mu$ に対応するので何かと特別扱いになることが多い．$\tilde{\tau}_*$, $\tilde{s}_*$ で後のほうの数 τ, s を表すものとする．

$0 \leq \alpha_i \leq n$ なる自然数の任意の列 $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_k)$ に対し単項式 $X_\alpha = X_{\alpha_1}\otimes\cdots\otimes X_{\alpha_k}$ を考える．X という文字はほとんど気休めに使われているから，X_α は α と同一視してよい．したがって $X_\alpha\otimes X_\beta$ をたんに $\alpha\otimes\beta$ と書くときもある．

$m_i(\alpha)$ は単語 X_α の中に文字 X_i が何回使われているか，その回数を示すものとし，次のようにおく：

$$\tilde{m}(\alpha) = (m_0(\alpha), \cdots, m_n(\alpha)) \quad (\text{使用回数ベクトル}).$$

正の実数の列 $(s_0, s_1, \cdots, s_n)$ に対して多重添字のときと同じように

$$\tilde{m}(\alpha)^{\tilde{\tau}_* \tilde{m}(\alpha)} = \prod_{i=1}^{n} m_i(\alpha)^{\tau m_i(\alpha)}, \quad \tilde{s}_*^{\tilde{\tau}_* \tilde{m}(\alpha)} = \prod_{i=1}^{n} s_i^{\tau m_i(\alpha)}$$

とおく．$\prod_{i=1}^{n}$ は積をつくることを表す．また

$$\tilde{m}(\alpha)^{\tilde{\tau}\tilde{m}(\alpha)} = m(\alpha)^{\tau_0 m_0(\alpha)} \tilde{m}(\alpha)^{\tilde{\tau}_* \tilde{m}(\alpha)}, \quad \tilde{s}^{\tilde{\tau}\tilde{m}(\alpha)} = s_0^{\tau_0 m_0(\alpha)} \tilde{s}_*^{\tilde{\tau}_* \tilde{m}(\alpha)}$$

のようにおく．これらの記号を用いて，単語 $X_\alpha = X_{\alpha_1} \otimes \cdots \otimes X_{\alpha_k}$ に対してセミノルムを次のように入れる：

$$|X_\alpha|_{\tilde{\tau}, \tilde{s}} = m(\alpha)^{\tilde{\tau}\tilde{m}(\alpha)} \tilde{s}^{\tilde{\tau}\tilde{m}(\alpha)}, \ |X_\alpha|_{\tilde{\tau}_*, \tilde{s}_*} = m(\alpha_*)^{\tilde{\tau}_* \tilde{m}(\alpha)} \tilde{s}_*^{\tilde{\tau}_* \tilde{m}(\alpha)}.$$

このセミノルムは単語を構成している文字の使用回数だけしか関係していないから単語の文字列をでたらめに並べ替えてもセミノルムは変化しない．

上のセミノルムを用いて，(5.1) 式の T に対し，3 種類のセミノルム系を次のように定義する：

$$\begin{aligned}
||T||_{\tilde{\tau}, \tilde{s}} &= \sum\nolimits_{|\alpha| \ge 0} |t_\alpha| \cdot |X_\alpha|_{\tilde{\tau}, \tilde{s}} && (\tilde{s} \text{ を動かしてセミノルム系とする}), \\
||T||_{\tilde{\tau}_*, s_0, \tilde{s}_*} &= \sum\nolimits_{j=0}^{\infty} {s_0}^j ||T_j||_{\tilde{\tau}_*, \tilde{s}_*} && (s_0, \tilde{s}_* \text{ を動かしてセミノルム系とする}), \\
||T||_{\tilde{\tau}_*, s_*, N_0} &= \sum\nolimits_{j=0}^{N_0} ||T_j||_{\tilde{\tau}_*, s_*} && (\tilde{s}_*, N_0 \text{ を動かしてセミノルム系とする})
\end{aligned} \tag{5.3}$$

$\tilde{\tau}, \tilde{\tau}_*, \tilde{s}, \tilde{s}_*$ などは上で定義してあるから，第 1 のものはこれでわかると思うが，第 2，第 3 のものにはこれらの記号の他に，さらに X_0 のところをコントロールするために s_0 とか N_0 が使われている．これを説明しておこう．第 2 のものでは $(s_0, \tilde{s}_*) = \tilde{s}$ であり，T_j は $T = \sum t_\alpha X_\alpha$ としたとき X_0 を j 回含む X_α のところだけを集めたものである．したがって $T = \sum_{j \ge 0} T_j$ である．

したがって第 3 のセミノルムでは X_0 を N_0 回まで含む X_α のところしか相手にしておらず，s_*, N_0 を動かしてセミノルム系をつくり完備化すると，X_0 に関して形式的冪級数になっているものがすべて現れる．これに対し第 2 のセミ

ノルムでは X_0 に関して収束半径が ∞ のものがすべて現れるようになっているのである．

上のセミノルム系で $\mathcal{T}^{n+1}$ を完備化したものをそれぞれ

$$\mathcal{T}_{\tilde{\tau}}^{n+1}, \qquad \mathcal{T}_{Hol,\tilde{\tau}_*}^{n+1}, \qquad \mathcal{T}_{\infty,\tilde{\tau}_*}^{n+1}$$

と書くことにする．使われているセミノルムの個数が連続無限個あるが，$\tilde{s}$ としては自然数だけからなるものを選んでも同じ空間が得られるから，これらのものはすべて σ-フレシェ空間であり，お互いの関係は次で与えられる：

$$\mathcal{T}_{\tilde{\tau}}^{n+1} \subset \mathcal{T}_{Hol,\tilde{\tau}_*}^{n+1} \subset \mathcal{T}_{\infty,\tilde{\tau}_*}^{n+1}.$$

左側の集合の元を右側の集合の元とみなす写像（包含写像）は連続である．

3 つ同時に話をするために，上の 3 つのどれかを表す記号として $\mathcal{T}_{\mho}^{n+1}$ や $\| \ \|_{\mho}$ を用いる．つまり，$\mho = \tilde{\tau}$, $(Hol, \tilde{\tau}_*)$, $(\infty, \tilde{\tau}_*)$ に応じて $\mathcal{T}_{\tilde{\tau}}^{n+1}$, $\| \ \|_{\tilde{\tau},\tilde{s}}$, $\mathcal{T}_{Hol,\tilde{\tau}_*}^{n+1}$, $\| \ \|_{\tilde{\tau}_*,s_0,\tilde{s}_*}$, $\mathcal{T}_{\infty,\tilde{\tau}_*}^{n+1}$, $\| \ \|_{\tilde{\tau}_*,s_*,N_0}$ を表すものと約束しておく．

先に進むために次のような，変数を分離する不等式が要る．

補題 5.1 （変数を分離する不等式） $x, y \geq 0$ のときには

$$x^{ax}y^{by} \leq (ax+by)^{ax+by} \leq x^{ax}y^{by}e^{bx+ay} \tag{5.4}$$

が得られる．ただし $0^0 = 1$ としている．

証明 第 1 の不等式は自明．第 2 は $-\log x$ の凸性より $x, y \geq 0$ に対して，

$$\log(x+y) \leq (\log x) + \frac{y}{x}, \quad \log(x+y) \leq (\log y) + \frac{x}{y},$$

だから $x, y \geq 0, a, b > 0$ ならば

$$ax\log(x+y) + by\log(x+y) \leq ax\log x + by\log y + (ax+by)$$

である．これを書き直せばよい． （証明終わり）

不等式 (5.4) を使うと簡単に次がわかる．

補題 5.2 $(\mathcal{T}_{\mho}^{n+1}; \otimes)$ は非可換結合的 σ-フレシェ代数である．

証明　（要点）セミノルム系を使って積の連続性を述べるときは $\forall\tilde{s}$ に対して

$$||T{\otimes}T'||_{\tilde{r},\tilde{s}} \le ||T||_{\tilde{r},\tilde{s_1}}||T'||_{\tilde{r},\tilde{s_2}}$$

がいつも成り立つように $\tilde{s_1},\tilde{s_2}$ が選べることを示せばよいので，$e^{\tilde{r}\tilde{m}(\alpha)}$ のような項はでてきてもまったく悪さはしない．（証明終わり）

商代数としての位相結合代数

> どんな結合代数でも自由テンソル代数を関係式イデアル $\mathcal{R}$ で商代数をつくれば得られるのだから，$\mathcal{T}_{\mho}^{n+1}$ の中で $\mathcal{R}$ の閉包 $\overline{\mathcal{R}}$ をつくり $\mathcal{T}_{\mho}^{n+1}/\overline{\mathcal{R}}$ とすれば，望みの関係式を満たす σ-フレシェ 代数が得られそうに見える．

また次のことも明らかであろう．

補題 5.3　$X_0{\otimes}\mathcal{T}_{\mho}^{n+1}, \mathcal{T}_{\mho}^{n+1}{\otimes}X_0$ は閉部分空間であり，X_0 を左，右からかける演算 $X_0{\otimes}: \mathcal{T}_{\mho}^{n+1} \to X_0{\otimes}\mathcal{T}_{\mho}^{n+1}$，${\otimes}X_0 : \mathcal{T}_{\mho}^{n+1} \to \mathcal{T}_{\mho}^{n+1}{\otimes}X_0$ は位相線形同型である．また，$\mathcal{T}_{\mho}^{n+1}$ の中で $X_1,\cdots,X_n$ で生成される部分代数の閉包を $\mathcal{T}_{\mho}^{*n}$ とし，X_0 で生成される両側イデアルを $(X_0)_{\mho} = \mathcal{T}_{\mho}^{n+1}{\otimes}X_0{\otimes}\mathcal{T}_{\mho}^{n+1}$ とすれば次の直和分解が得られる：

$$\mathcal{T}_{\mho}^{n+1} = \mathcal{T}_{\mho}^{*n} \oplus (X_0)_{\mho} \quad \text{（位相直和）}.$$

一方 $\mathcal{T}^{*n}$ において，$X_i{\otimes}X_j - X_j{\otimes}X_i, 1 \le i,j \le n$ で生成される両側イデアルを $\mathfrak{R}^{*n\mathfrak{C}}$ とすると，$\mathcal{T}^{*n}/\mathfrak{R}^{*n\mathfrak{C}}$ は可換代数で $X^{\alpha} = X_1^{\alpha_1}{\otimes}\cdots{\otimes}X_n^{\alpha_n}$ のように番号順に並んだ形の元の線形結合を $\mathfrak{C}^{*n}$ とすると，$\mathcal{T}^{*n} = \mathfrak{C}^{*n} \oplus \mathfrak{R}^{*n\mathfrak{C}}$ であり，単語の文字列をでたらめに並べ替えてもセミノルムは変化しないことにより，この直和は位相付きで成立することがわかる．つまり

$$\mathcal{T}_{\mho}^{*n} = \mathfrak{C}_{\mho}^{*n} \oplus \mathfrak{R}_{\mho}^{*n\mathfrak{C}} \quad \left(\begin{array}{l}\text{下付きの } \mho \text{ はそれぞれ } \mathcal{T}_{\mho}^{*n} \\ \text{のところでの閉包を表す.}\end{array}\right) \tag{5.5}$$

5.1.2　重対称化元の空間とハイゼンベルグ代数

これらをふまえて，ハイゼンベルグ代数の完備化を考えるために

$$\mu, x^1, \cdots, x^m, y_1, \cdots, y_m$$

で生成される自由テンソル代数 $(\mathcal{T}^{2m+1};\otimes)$ をとり，基本関係 (2.19) で生成される両側イデアルを $\mathfrak{R}^{2m+1}$ とし，$\mathcal{T}_{\mho}^{2m+1}$ での $\mathfrak{R}^{2m+1}$ の閉包を $\mathfrak{R}_{\mho}$ とする．

さらに $\mathfrak{R}^{2m+1}$ と μ とで生成される両側イデアルを $(\mu, \mathfrak{R})$ とし，その閉包を $(\mu, \mathfrak{R})_{\mho}$ とする．一方 $(\mathcal{T}^{2m+1}; \otimes)$ において $\mathfrak{R}^{*\mathfrak{C}}$ にあたるイデアルとして

$$x^i \otimes x^j - x^j \otimes x^i,\ y_i \otimes y_j - y_j \otimes y_i,\ x^i \otimes y_j - y_j \otimes x^i,\ 1 \leq i, j \leq m$$

で生成される両側イデアルを $\mathfrak{R}^{*2m\mathfrak{C}}$ とし，その $\mathcal{T}_{\mho}^{2m+1}$ での閉包を $\mathfrak{R}_{\mho}^{*2m\mathfrak{C}}$ とする．

商代数 $\mathfrak{H}^{2m+1} = \mathcal{T}^{2m+1}/\mathfrak{R}$ を考え，ここでの積を $*$ で表せば，ここでは μ は中心 (center) の元であり，$\mathfrak{H}^{2m+1}/\mu * \mathfrak{H}^{2m+1}$ は可換代数となることから容易に $(\mu, \mathfrak{R}) = (\mu, \mathfrak{R}^{*2m\mathfrak{C}})$ であることがわかる．$\mathcal{T}_{\mho}^{2m+1}$ での閉包をとれば

$$(\mu, \mathfrak{R})_{\mho} = (\mu, \mathfrak{R}^{*2m\mathfrak{C}})_{\mho} \tag{5.6}$$

である．

$\mathfrak{R}^{*2m\mathfrak{C}}$ の補空間（(5.5) の $\mathfrak{C}^{*n}$ にあたるもの）をつくるために少し準備をする．まず，**対称積**と称するものを次のように定義する．

$$F \circ G = \frac{1}{2}(F \otimes G + G \otimes F), \quad F, G \in \mathcal{T}_{n+1}$$

この積は結合律を満たさない[1]．単語の文字列を並べ替えてもセミノルムは変化しないから

$$\|F \circ G\|_{\mho} = \|F \otimes G\|_{\mho}$$

である．さらに次のようにおく：

$$\begin{aligned} (F\circ)^k \cdot H &= F \circ (F \circ (\cdots (F \circ H) \cdots)), \\ (F\circ)^k \circ (G\circ)^l \cdot H &= F \circ (F \circ (\cdots (F \circ (G\circ)^l \circ H) \cdots)). \end{aligned} \tag{5.7}$$

このように対称積を重ねたものを**重対称化元**と呼ぶ．

この記号の使い方で $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{2m})$ に対して

$$(xy)^\alpha = (x^1\circ)^{\alpha_1} \circ (\cdots (x^m\circ)^{\alpha_m} \circ ((y_1\circ)^{\alpha_{m+1}} \circ (\cdots (y_m\circ)^{\alpha_{2m}} \cdot 1)) \cdots)$$

とおき，$\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_{2m})$ を自然数の $2m$-組全体にわたって動かしておいて $(xy)^\alpha$ の（有限個の）線形結合全体でつくる $\mathcal{T}^{2m+1}$ の線形部分空間を $\mathcal{S}^{*2m}$ と

1) そのかわり，$a \circ b = b \circ a$ であり，$a^2 \circ (b \circ a) = (a^2 \circ b) \circ a$ の形に限定された結合律を満たす．このようなものをジョルダン代数と呼ぶ．

定義する．$\mathcal{S}^{*2m}$ は元の書かれ方が一定していて普通の多項式を書くときのように書かれているから $2m$-変数の多項式の空間と線形空間としては同型である．$\mathcal{S}^{*2m}$ に自然に定義される可換積を $f \odot g$ のように $\odot$ で表すことにする．$\mathcal{S}_{\mho}^{*2m}$ を $\mathcal{S}^{*2m}$ の $\mathcal{T}_{\mho}^{n+1}$ の中での閉包と定義する．これも，多項式の空間に位相を入れて完備化したものと線形同型になる．

$\mathcal{T}_{\mho}^{2m+1}$ の部分代数で（μ を含まず）$x^1, \cdots, x^m, y_1, \cdots, y_m$ だけで生成された自由テンソル代数を $\mathcal{T}_{\mho}^{2m}$ と書く．この中の単語 X_α に対して重対称化元 $x_1^{m_1(\alpha)} \odot \cdots \odot x_n^{m_n(\alpha)}$ を対応させる写像を $\sigma(X_\alpha)$ とすれば $\|X_\alpha\|_{\mho} = \|\sigma(X_\alpha)\|_{\mho}$ であり，σ を線形に拡張した写像を同じ記号で $\sigma : \mathcal{T}^{2m} \to \mathcal{S}^{*2m}$ とすれば，次のことが成立する．

補題 5.4　$\sigma : \mathcal{T}^{2m} \to \mathcal{S}^{*2m}$ は $\mathcal{T}_{\mho}^{2m}$ から $\mathcal{S}_{\mho}^{*2m}$ への連続写像に拡張される．さらに $\mathcal{S}_{\mho}^{*2m}$ を自然に $\mathcal{T}_{\mho}^{2m}$ に埋め込む包含写像は位相同型写像である．

この補題より (5.5) 式の証明と同じで位相直和

$$\mathcal{T}_{\mho}^{2m+1} = \mathcal{S}_{\mho}^{*2m} \oplus (\mu, \mathfrak{R}^{2m*\mathfrak{C}})_{\mho} = \mathcal{S}_{\mho}^{*2m} \oplus (\mu, \mathfrak{R})_{\mho} \tag{5.8}$$

が成立する．また代数 $(\mathcal{T}_{\mho}^{2m+1}; \otimes)$ を $(\mu, \mathfrak{R}^{2m*\mathfrak{C}})_{\mho}$ で割って商代数をつくればそれが $(\mathcal{S}_{\mho}^{*2m}; \odot)$ となる．

一方，上の重対称化の作業はハイゼンベルグ代数 $\mathfrak{H}^{2m+1}$ のほうでも行なうことができる．結合代数で一般に成立する公式 (4.6) を使えば，ハイゼンベルグ代数の生成元 $x^1, \cdots, x^m, y_1, \cdots, y_m$ については

$$x^i \circ (x^j \circ f) = x^j \circ (x^i \circ f),\ y_i \circ (y_j \circ f) = y_j \circ (y_i \circ f),\ x^i \circ (y_j \circ f) = y_j \circ (x^i \circ f)$$

が成立する．つまりこれらの元について重対称化を行なうときには変数の順番を気にしなくてよい．$\mathfrak{S}_{\mho}^{*2m}$ を $\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ の中で $*$-積を使った重対称化で $\mathcal{S}_{\mho}^{*2m}$ と同様にしてつくった空間とする．これも多項式の空間に位相を入れて完備化したものと線形同型になる．

(5.8) 式の両辺を $\mathfrak{R}_{\mho}$ で割って商空間をつくれば次の補題が得られる．

補題 5.5　$\mathcal{T}_{\mho}^{2m+1}$ から $\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ への自然な射影 π によって $\mathcal{S}_{\mho}^{*2m}$ は $\mathfrak{S}_{\mho}^{*2m}$ の上に線形同型に写される．しかも次が成立する：

$$\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1} = \mathcal{T}_{\mho}^{2m+1} / \mathfrak{R}_{\mho} = \mathfrak{S}_{\mho}^{*2m} \oplus (\mu, \mathfrak{R})_{\mho} / \mathfrak{R}_{\mho} \tag{5.9}$$

これは，写像 π は $\mathcal{S}_{\mho}^{*2m}$ の元については ⊗-積による対称積 ∘ をそのまま $*$-積による対称積 ∘ に読み替えるだけだということに注意して証明される．

$(\mu)_{\mho}$ を μ で生成する両側イデアルの閉包とすれば，第 2 同型定理より $(\mu,\mathfrak{R})_{\mho}/\mathfrak{R}_{\mho} = (\mu)_{\mho}/(\mu)_{\mho}\cap\mathfrak{R}_{\mho}$ であるが，$\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ で考えているときには μ は中心の元だから $(\mu)_{\mho}/(\mu)_{\mho}\cap\mathfrak{R}_{\mho} = \mu{\otimes}\mathcal{T}_{\mho}^{2m+1}/\mu{\otimes}\mathfrak{R}_{\mho}$ とも書かれる．

$[\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1},\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}]\subset\mu*\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ は容易であろう．

これまでのことをまとめて次の定理を得る．

定理 5.1 $(\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1};*) = (\mathcal{T}_{\mho}^{2m+1}/\mathfrak{R}_{\mho};*)$ は準解析的 μ-制御代数である．つまり $\bigcap_k \mu^k*\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1} = \{0\}$ が成立し，次も成り立つ：

$$\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1} = \mathfrak{S}_{\mho}^{*2m}\oplus\mu*\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}.$$

代数の拡張

これは強力な定理に見えるが，実はあまりよいものではない．こういう離れ技をやると代数が崩れる場合が多いのである．

定理 5.1 により $\forall\,\mho$ に対して $\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ という μ を中心の元とする μ-制御代数が得られたわけだが，これはいったいどんな代数なのだろうか．実は次のことがわかるのである．

定理 5.2 $\mho = (\tau_0,\tau)$ で $0<\tau_0\le 2\tau-1$ の場合，$\mho = (Hol,\tau)$ で $\tau\ge\frac{1}{2}$ の場合は $\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ は μ を中心の元とする解析的 μ-制御代数となる．

さらに $\mho = (\infty,\tau)$ のときには $\forall\,\tau>0$ について $\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ は形式的 μ-制御代数となる．

また，$\tau\ge\frac{1}{2}$ で $\tau_0\ge 2\tau-1$ の場合には $\mho' = (\tau_0,\frac{\tau_0+1}{2})$, $\mho'' = (2\tau-1,\tau)$ とおけば $\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ は次の包含関係のある代数となる：

$$\mathfrak{H}_{\mho''}^{2m+1}\supset\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}\supset\mathfrak{H}_{\mho'}^{2m+1}.$$

しかし，次のようなこともわかる．

定理 5.3 $\mho = (\tau_0,\tau)$ で，$0<\tau<\frac{1}{2}$ のとき（$\tau_0=0$ のときには $\tau_0=Hol$ または ∞ と読む）には $\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ の μ のところに 0 でない数 a を代入すると代数は $\{0\}$ だけからなるものに崩壊する．つまり $\mu-a$ で生成される $\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ のイデアルは $\mathfrak{H}_{\mho}^{2m+1}$ 自身に一致し，これによる商空間は $\{0\}$ となる．

これはほとんど形式的 μ-制御代数になっているといっているのである.

> μ を形式変数でなく数 a と思ってしまうのは，いきなり $\mu = a$ とおいてしまえばよいのだが，これは少し乱暴な話で数学的には $\mu - a$ で生成される両側イデアルで商空間をつくるのである.

μ が形式的変数で $\mathcal{O} = B[[\mu]]$ のような場合には $a \neq 0$ なら $a - \mu$ は可逆元だから $\mu - a$ で生成される両側イデアル $\mathfrak{J}$ は 1 を含んでしまい，$\mathcal{O}/\mathfrak{J} = \{0\}$ となる．このようになることを「代数が崩壊する」という．$\mu = a, a \neq 0$ とおいてしまうと**代数が崩壊することが多い**のである.

注意 5.1 かなり収束性が期待できそうなセミノルム系を使っているので，解析性まで期待できると思うかもしれないがそれは無理であると上の定理は述べているのである．ハイゼンベルグ代数の μ は $\hbar$ という数と思うとワイル代数になるのだが，定理 5.3 は $\mu = \hbar$ と思ってワイル代数の拡張となる結合代数が得られるのは $\tau \geq \frac{1}{2}$ の場合だけだといっているのである.

定理 5.2 とか定理 5.3 のようなことがどうしてわかるのかを説明しよう．定理 5.1 の μ-制御代数では $B = \mathfrak{S}_{\mho}^{*2m}$ を古典的相空間を与える可換代数と思うこともできたが，$\mathfrak{S}_{\mho}^{*2m}$ は線形空間としては $\mathbb{C}^{2m}$ 上の多項式全体の空間 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2m})$ に何か位相を入れて完備化したものと思える．すると積 $*$ は $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2m+1})$ の上に普通の可換積とは違う積が定義されたものだと解釈できる．こう考えたときの積の公式は後の 5.2.2 項で与えられる．そこで全体として代数をなしているかどうかは別にしてこの積を徹底的に調べるのである．定理 5.2 はそのようにして証明される.

ところが，ある位相のところまでくると積は定義できても結合律が成立しなくなるようなことが起こるのである．このような位相のところまで自由テンソル代数のほうから商空間をつくって得られるのだとすると，(商空間では結合律が成り立っていなくてはならないのだから) 結合子 $\{a, b, c\} = a*(b*c) - (a*b)*c$ は 0 になっていなければならない．このことから，結合律を壊しているところを 0 とおいた式が得られるのだが，この式から関係式イデアルの閉包の中に実は 1 が含まれてしまうといったことがわかるのである．定理 5.3 はこのやり方で証明される.

5.2　ワイル代数とその拡張

考え方の変更

> これまでは代数がまず与えられ，その後その代数がどんなものかと考えてきたが，ここで考え方を積公式優先に変える．（手法を拡大しない限り既成のものを越えることはできない.）

先に述べた第 2 の方法を考えるにはまず，手頃な実例を持っていないと考える材料に困る．まずは非可換で結合律を満たす積はどのようにしてつくるかというところから始めなければなるまい．

5.2.1　非可換積の構成

まず天下りに積公式を与えるやり方を説明しよう．A を完備な位相線形空間，A' を A の稠密な部分空間とする．線形写像 $D : A \to A$ が**擬冪零**であるとは，$\forall a \in A'$ に対してある n があって $D^n a = 0$ となることである（n は a に依存してよい）．

$(A, A', *_0)$ が A' を係数環とする**両側 A'-加群**であるとは，$(A', *_0)$ が実数体 $\mathbb{R}$ または複素数体 $\mathbb{C}$ 上の結合代数であり，A' の任意の元 a に対して左右の積 $a*_0$, $*_0 a$ が A から A への連続線形写像に拡張できる場合をいう．これは，積 $*_0$ が A に拡張できるといっているのではないことに注意してほしい．つまり，$(A', *_0)$ は A の位相で位相代数になっているわけではなく，たんに左右の積 $a*_0$, $*_0 a$ が A の位相で連続となっているのみである．つまり，両側 A'-加群というのは**位相代数的には開いた系**である．

a, b, c のどれか 2 つが A' の元のときには結合律 $a * (b * c) = (a * b) * c$ が成立していることが A' の稠密性より容易にわかる．

連続線形写像 $D : A \to A$ が両側 A'-加群 $(A, A', *_0)$ の**微分**であるとは，$DA' \subset A'$ であり，どちらか一方が A' の元のときに次が成立する場合をいう：

$$D(a *_0 b) = (Da) *_0 b + a *_0 (Db).$$

【例 5.1】　u, v を $\mathbb{R}^2$ の普通の座標関数とし，$A = C^\infty(\mathbb{R}^2)$, $A' = \mathbb{R}[u, v]$ とする．積は普通の可換積とする．$D = \partial_u, D' = \partial_v$ は互いに可換な擬冪零な微分である．

【例 5.2】　両側 A'-加群 $(A, A', *_0)$ において，$x, y \in A'$ で，$[x, y]_{*_0}$ が中心

(center) の元となるものがあったとする．$D=\mathrm{ad}(x)$, $D'=\mathrm{ad}(y)$ は $(A, A', *_0)$ の微分であり，$DD'=D'D$ である（しかし一般に擬冪零とは限らない）．

同様に連続線形同型写像 $\alpha: A \to A$ が両側 A'-加群 $(A, A', *_0)$ の**同型写像**であるとは，α が $(A', *_0)$ から $(A', *_0)$ への同型写像となる場合をいう．

上のような $(A, A', *_0)$ の微分 D, D' で互いに可換なもの（つまり $[D, D']=0$ が成立），かつ擬冪零なものが与えられたとする[2]．

このとき，（μ を定数として）D, D' を使って**モイヤル型の積**と呼ばれる新しい積を次の式で定義する（これは微分を使って新しい積を定義するやり方だが，第 6 章で積分を使って新しい積をつくるやり方も出てくる）：

$$f *_1 g = f e^{\mu \overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'}} g, \tag{5.10}$$

ただし，$e^{\mu \overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'}} = \sum_{k \geq 0} \frac{\mu^k}{k!}(\overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'})^k$ であり $\leftarrow, \rightarrow$ はどちら側に作用するかを表している．つまり $f(\overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'})^k g = D^k f *_0 D'^k g$ である．

新しい積 $*_1$ も A' 上で結合律を満たし，$(A, A', *_1)$ も A' を係数環とする両側 A'-加群となり，D, D' は新しい両側 A'-加群 $(A, A', *_1)$ の微分となることがわかる．総和記号の練習になるので，ていねいに計算して結合律を証明してみるとよい．また，$\forall f \in A'$ について，$f*_1$, $*_1 f$ は A から A への線形連続写像であることも容易にわかる．

$D_1 : (A, *_0) \to (A, *_0)$ が微分で $[D_1, D] = [D_1, D'] = 0$ ならば，$D_1 : (A, *_1) \to (A, *_1)$ も微分となる．

同様に，$\alpha : (A, *_0) \to (A, *_0)$ が同型写像で，$[\alpha, D] = [\alpha, D'] = 0$ ならば，$\alpha : (A, *_1) \to (A, *_1)$ も同型写像となる．

補題 5.6 D, D', D_1, D'_1 が互いに可換な $(A, *_0)$ の擬冪零な微分であるとする．積 $*_1$ を (5.10) 式で定義し，さらに積 $*_2$ を $f *_2 g = f e^{\mu \overleftarrow{D_1} *_1 \overrightarrow{D'_1}} g$ で定義すると $(A, *_2)$ も A' を係数環とする両側 A'-加群となり，次の式が成立する：

$$f *_2 g = f e^{\mu(\overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'} + \overleftarrow{D_1} *_0 \overrightarrow{D'_1})} g.$$

補題 5.6 の公式は次のような形にも書ける：

$$f e^{\mu \overleftarrow{D_1} (e^{\mu \overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'}}) \overrightarrow{D'_1}} g = f e^{\mu(\overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'} + \overleftarrow{D_1} *_0 \overrightarrow{D'_1})} g. \tag{5.11}$$

2) このような微分の組はいつもあるとは限らないし，あっても一意的ではない．

これは次々に重ねてやることができるので多変数の場合にもうまく使える．

補題 5.6 で $D_1 = -D$, $D'_1 = D'$ とおけば，

$$f *_0 g = f e^{-\mu \overleftarrow{D} *_1 \overrightarrow{D'}} g \tag{5.12}$$

も得られる．これは，最初の $*_0$ を後の $*_1$ を使って再構成できることを示している．とくに $*_0$ が可換積でそこから出発して $*_1$ という非可換積がつくられている場合にはこのことは重要な意味を持つ．しかし，$*_1$-積を可換積からつくるやり方は D, D' のとり方に依存するし，何通りもある．

$D_1 = -D'$, $D'_1 = D$ のようにおき，$\overleftarrow{D} \overset{*_0}{\wedge} \overrightarrow{D'} = \overleftarrow{D} *_0 \overrightarrow{D'} - \overleftarrow{D'} *_0 \overrightarrow{D}$ という記号を用いれば，

$$f \hat{*} g = f e^{\mu(\overleftarrow{D} \overset{*_0}{\wedge} \overrightarrow{D'})} g \tag{5.13}$$

も新しい A' を係数環とする両側 A'-加群となる．これを**モイヤル積公式**と呼ぶ．この積からもとの積を得るには

$$f *_0 g = f e^{-\mu(\overleftarrow{D} \overset{\hat{*}}{\wedge} \overrightarrow{D'})} g$$

とすればよい．

このように新しい積をつくっても，逆の手続きでもとに戻せるということが大切なことである．

$(A, A', *)$ が両側 A'-加群において，A' の元 x, y で $[x, y] = \mu$ なる関係を満たすものを，（積 $*$ に関して）互いに**正準共役**であるという．$D = -\frac{1}{\mu}\mathrm{ad}(x)$, $D' = \frac{1}{\mu}\mathrm{ad}(y)$ は $(A, A', *)$ の微分であり，$[D, D'] = 0$ を満たす．A' が x, y の多項式全体のような場合には D, D' は擬冪零な微分ともなる．次の定理は重要である．

定理 5.4　上の仮定のもとで，新しい積 $f *_0 g = f e^{-\frac{\mu}{2}(\overleftarrow{D} \overset{*}{\wedge} \overrightarrow{D'})} g$ は可換積である．これを**逆モイヤル積公式**と呼ぶ．

可換な積はいろいろ便利な面を持っている．第一に元の記述が一意的にできるから元の集団に位相を導入しようとするときに便利である．

【例 5.3】　$\forall f, g \in \mathbb{C}[x, y, z]$ に対する積 $f * g$ を次で定義する：

$$f * g = f e^{z \overleftarrow{\partial_y} \wedge \overrightarrow{\partial_x}} g. \tag{5.14}$$

(5.14) 式でハイゼンベルグ代数が得られていることは明らかであろう．ハイゼンベルグ代数の z のところに数 $\hbar i$ を代入するとワイル代数が得られる．

さらに x, y に関する C^∞-関数全体を $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ とし，$\mu = z$ として，形式的冪級数環 $C^\infty(\mathbb{R}^2)[[\mu]]$ をつくれば，これは自然に形式的 μ-制御代数となる．さらに，x, y, μ に関する C^∞-関数全体を $\mathcal{A} = C^\infty(\mathbb{R}^3)$ とし（位相は C^∞-位相），$\mathcal{A}' = \mathbb{C}[x, y, \mu]$ とした場合には，$(\mathcal{A}, \mathcal{A}')$ は両側 $\mathcal{A}'$-加群となる．

5.2.2 ワイル代数における順序表示と代数の拡張

非可換代数の元の表示は一般に面倒なものである．これは元の書き方が一定しないということによる．このために，非可換代数を扱うときにはどういう表示にするかが真っ先に問題になる．これを**順序付問題**という．以下しばらくは話を簡単にするために，2 変数のワイル代数で考えることにするが，内容がわかってしまえば $2m$-変数のワイル代数とか $\hbar i$ を μ とおいて $(2m+1)$-変数のハイゼンベルグ代数にするのは楽な作業であろう．ワイル代数の場合には順序付けのしかたは普通は次の 3 種類を考える．

- **正規順序表示** (normal ordering)：これは $\sum a_{mn} u^m * v^n$ のように各項の中で u が左端にくるように整頓して書くやり方である．

- **反正規順序表示** (anti-normal ordering)：これは $\sum a_{nm} v^n * u^m$ のように各項の中で v が左端にくるように整頓して書くやり方である．

- **ワイル順序表示** (Weyl ordering)：これは $\sum a_{mn} u^m \odot v^n$ のように各項を重対称積（(5.7) 式参照）を用いて整頓して書くやり方である．

すぐに別の計算法を与えるので，重対称積なるものの定義はここでは必要ない．

つまり，ワイル代数というのは，多項式の空間に上のような積が定義された代数とみなすことができるのであるが，$*$-積の計算のしかたがいくつもあるからそれらを並列的に走らせて計算をしなければいけない[3)]．

簡単な多項式についてそれぞれの表示を表にすると次のようになる．

---

3) ワイル代数の 1 つの元が上のそれぞれの表示法によってそれぞれの多項式 $p_\circ(u, v), p_\bullet(u, v), p_\odot(u, v)$ で表示される．違う順序表示間の**相互変換**を確定するには少し注意深い計算が必要である．これはもう少し後で論ずる．ここでの相互変換は座標変換に似ているが，まったく別のものである．

ワイル代数の元	正規順序表示	反正規順序表示	ワイル順序表示
$u*u+v*v$	u^2+v^2	u^2+v^2	u^2+v^2
$u*v+v*u$	$2u{\circ}v+\hbar i$	$2u{\bullet}v-\hbar i$	$2u\odot v$
$u*v*u$	$u^2{\circ}v+\hbar iu$	$2u{\bullet}v-\hbar iv$	$u^2\odot v+\frac{1}{2}\hbar i$

積公式の拡張

それぞれの順序表示でワイル代数は多項式の空間に線形同型となるのだが，積の公式はそれぞれ次のようになる．

- 正規順序表示：**ΨDO-積公式**（擬微分作用素積公式）

$$f(u,v)*g(u,v)=f\exp\{\hbar i(\overleftarrow{\partial_v}{\circ}\overrightarrow{\partial_u})\}g. \tag{5.15}$$

- 反正規順序表示：**$\bar{\Psi}$DO-積公式**

$$f(u,v)*g(u,v)=f\exp\{-\hbar i(\overleftarrow{\partial_u}{\bullet}\overrightarrow{\partial_v})\}g. \tag{5.16}$$

- ワイル順序表示：**モイヤル積公式**

$$f(u,v)*g(u,v)=f\exp\frac{\hbar i}{2}\left\{\overleftarrow{\partial_v}\overset{\odot}{\wedge}\overrightarrow{\partial_u}\right\}g \tag{5.17}$$

ここで，$\odot$, $\bullet$, $\circ$ はいずれも多項式に定義される普通の可換積であるが，使っている順序表示を区別する目的で書き分けている[4]．見慣れぬ記号については，前の 5.2.1 項を参照してもらいたい．$\hbar i$ のところを μ とおいてこれも変数のように考えればハイゼンベルグ代数が得られる．

上の公式を多変数で読むには $\boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_m)$, $\boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_m)$ とし

$$\overleftarrow{\partial_v}{\circ}\overrightarrow{\partial_u}=\sum_i\overleftarrow{\partial_{v_i}}{\circ}\overrightarrow{\partial_{u_i}},\quad \overleftarrow{\partial_v}\overset{\odot}{\wedge}\overrightarrow{\partial_u}=\sum_i\overleftarrow{\partial_{v_i}}\overset{\odot}{\wedge}\overrightarrow{\partial_{u_i}}$$

などと読み替えるだけでよい．

上の 3 つの積の公式は同時に上の 3 つの表示法をも与えている．まず u,v は何表示で書いても u,v のままである．$u*v$ を正規順序表示するということは

4) 記号 $\odot$ は物理では太陽を表していておおげさすぎるので，後のほうでは $f\cdot g$ になったり，まったく書かないで，fg のようにする．

$u*v$ を ΨDO-積公式で計算して $u \circ v$ という答えを得るということに他ならない．前の表について計算してみればこのことが納得できるだろう．

こうしてみると，生成元が与えられているときには，表示法を与えるということは $*$-積の計算公式を与えることと同じことである．

積の計算のしかたがこのように具体的に与えられると，それをもとにして積を拡張することができる．次のことは証明する必要はあるまい．

【例 5.4】 U を $\mathbb{R}^{2n}$ の開集合，$C^\infty(U)$ を C^∞-関数全体とする．このとき式 (5.15) または (5.16) で $*$-積を定義すれば $(C^\infty(U)[[\hbar]];*)$ は形式的 $\hbar i$-制御代数である．(5.17) で $*$-積を定義すれば $(C^\infty(U)[[\hbar]];*)$ は正則で形式的な $\hbar i$-制御代数である．これを**拡張ワイル代数**と呼ぶことにする．

$Hol(\mathbb{C}^2)$ を $\mathbb{C}^2$ 全体で正則な関数（整関数と呼ぶ）にコンパクト開位相を入れたものとする．

- $f*g$ は f,g のどちらか一方が多項式なら定義される．
- 多項式 $p = p(u,v)$ に対して左変換 $p* : f \to p*f$，および右変換 $*p : f \to f*p$ は $Hol(\mathbb{C}^2)$ から自身へのコンパクト開位相に関して連続な写像となる．
- 結合律 $f*(g*h) = (f*g)*h$ は多項式近似定理により f,g,h のどれか 2 つが多項式ならば成立する．

上のものを**両側 $(\mathbb{C}[u,v];*)$-加群**と呼ぶ．積は一方が多項式なら他方は C^∞-関数でありさえすれば計算できるし，μ を形式的変数と見て，何もかも μ の形式的冪級数の形に整理して書くことにすれば，（μ^n のところでは n-階までの微分しか使われないから）任意の C^∞-関数 f,g に対して $f*g$ が計算できる．

上で定義した両側 $(\mathbb{C}[u,v];*)$-加群 $Hol(\mathbb{C}^2)$ は（積がいつでも定義できるわけではないから）代数にはなっていないのであるが，積の公式が完全にわかっているという強みがある．その意味で一般の非可換代数を扱うときの問題点を探るためのよい材料になるのである．

可換積の役割

可換積はたんに代数の元に一意性のある表示を与えるための補助的役割を負っているだけであると考えている．

次の命題はモイヤル積公式の最も便利な性質である．

命題 5.1　u, v と u', v' が下のような関係で結ばれているとする：

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \quad \forall A \in SL_{\mathbb{C}}(2), \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}. \tag{5.18}$$

このとき，Φ^* を u, v を u', v' に置き換える置き換え写像 (pull-back) とすると，Φ^* は $*$-積，$\cdot$-積の両方に関して同型写像となる．

他の表示はこのようなうまい性質は持たない．たとえば $ab \neq 0$ のとき，

$$(au+bv)_*^m = (au+bv)_\cdot^m, \quad \text{ではあるが} \quad (au+bv)_*^m \neq (au+bv)_\circ^m$$

である．しかし正規順序表示において，

$$f(u) * g(u,v) = f(u) \circ g(u,v), \quad f(u,v) * g(v) = f(u,v) \circ g(v) \tag{5.19}$$

ということもわかる．

さらに生成元の変更もできることに注意しておこう．(5.18) 式のようにおくと，$[u', v'] = -\hbar i$ であり，したがって u', v' も生成元と思ってよい．このような u, v を**量子正準共役対**と呼ぶ．

【例 5.5】　モイヤル積公式で (5.11) 式のように分解して計算すると

$$e^{su+tv} * e^{s'u+t'v} = e^{\frac{\hbar i}{2}(ts'-st')} e^{(s+s')u+(t+t')v} \tag{5.20}$$

が得られる．

注意 5.2　この章では u, v は複素変数として扱われているが，これらを実変数として考えてしまうこともできる，その場合には積公式を微分を使わずに積分を使って与えると，もう少し広いところに積が拡張される．これについては第 6 章で述べる．

5.2.3　積の計算公式

積 $f * g$ の計算公式が具体的に与えられたわけだから，これを利用して積の定義できる範囲を拡張できる．そのためにいろいろな関数空間を設定する．ま

ずハイゼンベルグ代数を考えるために $(2m+1)$-変数の話に戻す．$(2m+1)$-変数の普通の多項式は多重添字法で

$$f=\sum a_{i,\alpha,\beta}\mu^i x^\alpha y^\beta, \quad (\alpha,\beta)=(\alpha_1,\cdots,\alpha_m,\beta_1,\cdots,\beta_m)$$

のように書かれるから，自由テンソル環のときと同様に (5.3) 式のセミノルム系を使って単語位相を入れることができる．それぞれの位相で多項式環を完備化したものを

$$\mathfrak{S}_{\tilde{\tau}}(\mathbb{C}^{2m+1}), \qquad \mathfrak{S}_{Hol,\tilde{\tau}_*}(\mathbb{C}^{2m+1}), \qquad \mathfrak{S}_{\infty,\tilde{\tau}_*}(\mathbb{C}^{2m+1})$$

と書くことにし，3 つ同時に話をするために，上の 3 つのどれかを表す記号として前と同様に $\mathfrak{S}_{\mho}(\mathbb{C}^{2m+1})$ や $\|\ \|_{\mho}$ を用いる．$\mathfrak{S}_{\mho}(\mathbb{C}^{2m+1})$ は自然に可換 σ-フレシェ代数となっている．

これとは別に多項式空間にセミノルム系を導入してその位相により完備化して σ-フレシェ代数をつくる．そのため (5.2) 式と同様に次の記号を用いる：

$$\tilde{p}=(p_0,p), \quad \tilde{b}=(b_0,b), \quad \tilde{p}_*=p, \quad \tilde{b}_*=b.$$

ただし $n=2m$ で，$p_0,p>0$, $b_0,b>0$ としている．

定義 5.1 r_0, N_0 をそれぞれ実正数，非負整数として，多項式の空間 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2m+1})$ にセミノルム系

$$\{\|\cdot\|_{\tilde{p},\tilde{b}}\}_{\tilde{b}\ \text{が動く}}, \quad \{\|\cdot\|_{\tilde{p}_*,\tilde{b}_*,r_0}\}_{\tilde{b}_*,\ r_0\ \text{が動く}}, \quad \{\|\cdot\|_{\tilde{p}_*,\tilde{b}_*,N_0}\}_{\tilde{b}_*,\ N_0\ \text{が動く}}$$

を次のように定義する．$\mu=x_0$ として

$$\begin{aligned}
\|f\|_{\tilde{p},\tilde{b}} &= \sup_{(x_0,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^{n+1}}|f|\exp(-\sum\nolimits_{i=0}^{n}b_i|x_i|^p),\\
\|f\|_{\tilde{p}_*,\tilde{b}_*,r_0} &= \sup_{|x_0|\le r_0}\ \sup_{(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{C}^n}|f||x_0|^{p_0}\exp(-\sum\nolimits_{i=1}^{n}b_i|x_i|^p), \qquad (5.21)\\
\|f\|_{\tilde{p}_*,\tilde{b}_*,N_0} &= \sum\nolimits_{k=0}^{N_0}\|f_k(x_1,\cdots,x_n)\|_{\tilde{p}_*,b_*}
\end{aligned}$$

ただし，第 3 式では f を x_0 の冪級数として次のように展開している：

$$f(x_0,x_1,\cdots,x_n)=\sum\nolimits_{k=0}^{\infty}f_k(x_1,\cdots,x_n)x_0^k.$$

$\mathcal{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ を上のセミノルム系で完備化しそれぞれ次のように書く：

$$\mathcal{E}_{\tilde{p}}(\mathbb{C}^{n+1}), \qquad \mathcal{E}_{Hol,\tilde{p}_*}(\mathbb{C}^{n+1}), \qquad \mathcal{E}_{\infty,\tilde{p}_*}(\mathbb{C}^{n+1}).$$

さらに上の 3 つのどれかを表す記号として $\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{C}^{n+1})$ を使うことにする．補題 5.2 と同様の証明で次のことがわかる．

補題 5.7　$\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{C}^{n+1})$ は自然な積で可換な σ-フレシェ代数である．

$\mathfrak{S}_\mho(\mathbb{C}^{2m+1})$ は冪展開の係数に注目した位相で完備化したものであり，$\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{C}^{2m+1})$ は関数の増大度に注目した位相で完備化したもので一見何の関係もなさそうに見えるが，実は次のことがわかるのである．Ω と $\mho$ とに次の上下のような対応を考える（対応は上下）：

$$\begin{array}{c|lll} \Omega & \tilde{p}, & (Hol,\tilde{p}_*), & (\infty,\tilde{p}_*) \\ \mho & \frac{1}{\tilde{p}}, & (Hol,\frac{1}{\tilde{p}_*}), & (\infty,\frac{1}{\tilde{p}_*}) \end{array}$$

（ただし，$\frac{1}{\tilde{p}} = (\frac{1}{\tilde{p}_0}, \frac{1}{p})$ である）

命題 5.2　位相の対応関係は上に与えたものとして，$\mathfrak{S}^{n+1}_\mho(\mathbb{C}^{2m+1})$ は可換 σ-フレシェ代数として $\mathcal{E}_\Omega(\mathbb{C}^{2m+1})$ と同型である．

証明の概略　証明は難しくないが評価式の計算は紙面を食うので概略だけ述べる．詳しくは [10],[35] を参照してもらいたい．積の対応が自然なものなので両者が位相線形同型であることを示せば十分であろう．証明の本質はテンソル空間のところのセミノルムと増大度のセミノルムとが同値であることを示すところにあるのだから，変数を分離する補題 5.1 を考えておけば，$n=1$ の場合で考えれば十分で，したがって 1 変数 z で $\Omega = p, \mho = \tau = 1/p$ の場合で考える．まず，$f = \sum a_n z^n \in \mathfrak{S}_\tau(\mathbb{C})$ とすると，$\forall b > 0$ に対して，ある n_0 があって $n \geq n_0$ に対してはつねに $|a_n| \leq Cn^{-n\tau}b^{-n\tau}$ という評価式が成立する．ただし $C = C(b, n_0) > 0$ である．不等式 $n^{-n\tau} = (n\tau)^{-n\tau}\tau^{n\tau} \leq \frac{\tau^{\tau n}}{[n\tau]!}$ より（[] はガウス記号），$n \geq n_0$ のところでは

$$|a| = \left|\sum_{n\geq n_0} a_n z^n\right| \leq \sum_{n\geq n_0} |a_n||z|^n \leq C \sum_{n\geq n_0} \frac{\tau^{\tau n}|z|^n}{b^{\tau n}[n\tau]!} \tag{5.22}$$

だから $p = \frac{1}{\tau}$ とおけば

$$|a| \leq C \sum_{n\geq n_0} \frac{(\tau^{\tau p}|z|^p)^{\frac{n}{p}}}{b^{\tau n}[\frac{n}{p}]!} \leq C\frac{1}{p}|z|^p \sum_{n\geq n_0} \frac{(\frac{1}{bp}|z|^p)^{[\frac{n}{p}]}}{[\frac{n}{p}]!} \tag{5.23}$$

がわかる．評価のしかたは $0<p\le 1$ と $1<p$ との場合で分けなければならないがどちらの場合にも

$$|a| \le \max\left\{1, \frac{1}{p}\right\} C|z|^p \exp\left(\frac{1}{pb}|z|^p\right) \tag{5.24}$$

となり，$\forall s>0$ に対し，$b>0$ を $\frac{1}{s}<pb$ となるようにとると

$$|z| \to \infty \quad \text{のとき} \quad |a|\exp[-s|z|^p] \to 0 \tag{5.25}$$

が得られ，$f=\sum a_n z^n \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C})$ がわかる．

逆向きの不等式は $f \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C})$ とすると，$\forall s > 0$ について不等式 $\sup_{z\in\mathbb{C}} |f(z)|\exp(-s|z|^p) < \infty$ が成立し，$f \in \mathcal{E}_p(\mathbb{C})$ は整関数だから，f は収束冪級数 $\sum c_k z^k$ として表示される．$M(r)=\max_{|\xi|=r}|f(z)|$ とするとコーシーの積分公式より，$\forall\delta>0$ に対しある定数 $C_\delta>0$ があって，

$$|c_k| \le \frac{M(r)}{r^k} \le C_\delta \frac{e^{\delta r^p}}{r^k}$$

が成立する．δ を固定し，r を動かして右辺の最小値をとれば

$$|c_k| \le C_\delta(\delta e p)^{\frac{1}{p}k} k^{\frac{1}{p}k} \tag{5.26}$$

が得られ，式 (5.26) を使って δ を十分小さくすれば $f \in \mathfrak{S}_{\frac{1}{p}}(\mathbb{C})$ がわかる．

だいたい上のことを変数を分離して各変数について行なえばよいのである．

こうして関数の空間に話がいってしまえば 5.2.2 項で与えた積公式で $\hbar i=\mu$ とおきハイゼンベルグ代数での積を計算することができる．これを実行すると次の定理が得られるのである（証明は省略する）．

定理 5.5 $\Omega=(p_0,p)$ で $0<p\le\frac{2p_0}{p_0+1}$ の場合，$\Omega=(Hol,p)$ で $0<p\le\frac{1}{2}$ の場合は 5.2.2 項で与えたどの積公式に関しても，$\mathcal{E}_\Omega^{2m+1}(\mathbb{C}^{2m+1})$ は μ を中心の元とする解析的 μ-制御代数となる．

さらに $\Omega=(\infty,p)$ のときには，$\forall\, p>0$ について $\mathcal{E}_\mho^{2m+1}(\mathbb{C}^{2m+1})$ は形式的 μ-制御代数となる．

次に自由テンソル代数 $\mathcal{T}^{n+1}$ から商代数 $\mathfrak{H}^{2m+1} = \mathcal{T}^{2m+1}/\mathfrak{R}$ への自然な射影 π を考えるのだが，$\mathfrak{H}^{2m+1}$ はハイゼンベルグ代数であり，これは多項式

空間 $\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2m+1})$ に（$\hbar i = \mu$ とおいた）モイヤル積公式 (5.17) で $*$-積の入った代数 $(\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2m+1}); *)$ であると思うことができるから，π を $(\mathcal{T}^{n+1}; \otimes)$ から $(\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2m+1}); *)$ への準同型と思うことができる．この準同型 π は $\mathcal{T}^{n+1}$ の元で $X_{\alpha_1} \otimes X_{\alpha_2} \otimes \cdots \otimes X_{\alpha_k}$ と $\otimes$ を使って書かれているところを $X_{\alpha_1} * X_{\alpha_2} * \cdots * X_{\alpha_k}$ のように $*$ に変えて得られている．

定理 5.6 準同型 $\pi : (\mathcal{T}^{n+1}; \otimes) \to (\mathcal{P}(\mathbb{C}^{2m+1}); *)$ は $\mho = (\tau_0, \tau)$ で $0 < \tau_0 \leq 2\tau - 1$, $\mho = (Hol, \tau)$ で $\tau \geq \frac{1}{2}$, または $\mho = (\infty, \tau)$ で $\tau > 0$ の場合には $\mathcal{T}_{\mho}^{n+1}$ から $\mathfrak{S}_{\mho}(\mathbb{C}^{2m+1})$ の上への連続写像に拡張できる．

上の 2 つの定理を使えば定理 5.2 が得られるのは明らかであろう．

5.3 自発的結合律の破れと代数の崩壊

この節で定理 5.3 のようなことがわかる理由を説明しよう．そのために 2 変数のワイル代数をもう少し詳しく見ておく必要がある．

ワイル代数のときの $\hbar$ は正のパラメーターだから $e^{\frac{1}{\hbar}(u^2+v^2)}$ のような元を考えることは当然許されている．しかし，このように $\hbar$ について，$\hbar = 0$ まで定義できない元を使い始めると（第 1 結合律定理[5]が使えなくなり），実際，いろいろなことが起こることをこの節で注意する．

5.3.1 拡張されたワイル空間と真空

$p > 0$ を固定し，$|\xi| = (|u|^2 + |v|^2)^{1/2}$ として整関数からなる関数空間 $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ を次のような空間として

記号の読み方に注意．どのように読んだら意味が出るか，意味が出るように読むのである．

$$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2) = \{f \in Hol(\mathbb{C}^2)\,;\, \|f\|_{p,s} = \sup |f|\, e^{-s|\xi|^p} < \infty,\ \forall s > 0\} \tag{5.27}$$

と定義する．$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ にセミノルム系 $\{\|\ \|_{p,s}\}_{s>0}$ で位相を入れれば $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2); \cdot)$ は結合律を満たす可換フレシェ代数となる．$\cdot$ は普通の可換積のことであるが，$\cdot$ は $\circ$ とか $\bullet$ とかと書いてもよい．

$0 < p < p'$ の場合には当然 $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2) \subset \mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)$ であり，包含写像は連続になる ([10])．空間 $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ は自然な線形作用 (5.18) で $SL_{\mathbb{C}}(2)$-不変である．

5) 5.3.2 項参照．

$\mathcal{E}_{p+}(\mathbb{C}^2)=\bigcap_{p'>p}\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)$ とし射影極限位相を入れておく．多項式全体 $\mathbb{C}[u,v]$ は $\mathcal{E}_{0+}(\mathbb{C}^2)$ に稠密に含まれている．任意の指数関数 $e_*^{\alpha u+\beta v}$ は $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ に含まれるが $\mathcal{E}_1(\mathbb{C}^2)$ には含まれない．任意の指数関数 $e_*^{au^2+bv^2+2cuv}$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ に含まれるが，$\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2)$ には含まれない．一般に $\sum\left(\frac{1}{n!}\right)^{\frac{1}{p}}u^n$ のような関数は $\mathcal{E}_{p+}(\mathbb{C}^2)$ に含まれ，$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ には含まれない．次のことがわかっている[6)]．

定理 5.7　$0<\forall p\leq 2$ に対して $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ は上で述べたどの積公式に関しても $*$-積で閉じており，$(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2);*)$ は結合律を満たす σ-フレシェ代数となる．

$p>2$ の場合については p' を $\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}\geq 1$ となるように選ぶと，5.2.2 項で述べたどの積公式も

$$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)\times\mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)\to\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2),\quad \mathcal{E}_{p'}(\mathbb{C}^2)\times\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)\to\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$$

なる連続双線形写像を与える．（この場合は $p'<2$ でなければならないことに注意.）

> 空間を広げる方策の 1 つとして位相を入れて完備化するという方法がある．この場合位相が弱いほど得られる空間は広くなるのである．

上の定理は積公式を丹念に計算するとわかるが，次のような変数を分離するための不等式を用いて考えればすぐに多変数の場合にも拡張できる．$\forall p\geq 1$ に対して $C_p>0$ があって

$$\sum_{i=1}^{m}(|x_i|+|y_i|)\geq\sum_{i=1}^{m}(|x_i|^p+|y_i|^p)^{\frac{1}{p}}\geq C_p\sum_{i=1}^{m}(|x_i|+|y_i|). \tag{5.28}$$

これは有限次元ベクトル空間では（局所コンパクトなので）どのノルムでも同じ位相を定義することから得られる．

真空

$\hbar$ が正定数として扱われる拡張されたワイル空間では，$\varpi_{00}=2e_*^{\frac{2i}{\hbar}uv}$, $\bar{\varpi}_{00}=2e_*^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$ のような元は積に対してかなり特殊な働きをする．モイヤル積公式による直接計算で次のことが容易にわかる：（この計算はさぼらずに必ずやってみること．でないと，後のことがわからなくなる.）

$$v*e_*^{\frac{2i}{\hbar}uv}=0=e_*^{\frac{2i}{\hbar}uv}*u,\quad u*e_*^{-\frac{2i}{\hbar}uv}=0=e_*^{-\frac{2i}{\hbar}uv}*v. \tag{5.29}$$

6)　証明はていねいに計算するだけだが，案外難しい．[31] を見てもらいたい．

次の式も直接計算で示せる（微分の計算のよい演習問題である）：

$$\varpi_{00} * \varpi_{00} = \varpi_{00}, \quad \bar{\varpi}_{00} * \bar{\varpi}_{00} = \bar{\varpi}_{00}. \tag{5.30}$$

わざわざ 2 倍しているのはこの式を成り立たせるためである．$\varpi_{00} = 2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$ を点 $(0,0)$ における**真空**と呼ぶ．$\bar{\varpi}_{00} = 2e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$ を点 $(0,0)$ における**共役真空** (bar-vacuum) と呼ぶ．共役真空 $\bar{\varpi}_{00}$ は正準共役対 $(-v,u)$ に関する真空といってもよい．しかし，ここでいっている真空は (5.29) 式が物理で使う真空 $|0\rangle$ に似た性質だという理由でそう呼んでいるだけで，物理的意味は考えない（というか，できるだけ物理からくる先入観を避けたい）．

モイヤル積公式では $u{*}v + v{*}u = 2uv$ である．さらに $c^2 - ab = -1$ だと $au^2 + bv^2 + c(u{*}v + v{*}u) = au^2 + bv^2 + 2cuv$ は

$$au^2 + bv^2 + 2cuv = 2i(\alpha u + \beta v)(\gamma u + \delta v), \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

となるように因数分解される．すると $u' = \alpha u + \beta v$, $v' = \gamma u + \delta v$ は量子正準共役対だから，

$$au^2 + bv^2 + 2cuv = 2u'v' = u'{*}v' + v'{*}u'$$

と書かれることがわかる．$u'v'$ は u, v に関するモイヤル積公式で使う可換積と思ってもよいし，u', v' に関するモイヤル積公式で使う可換積と思ってもよい．モイヤル積公式で計算すると容易に

$$(\gamma u + \delta v) * 2e^{\frac{i}{\hbar}2(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)} = 0 \tag{5.31}$$

がわかる．$\varpi = 2e^{\frac{i}{\hbar}2(\alpha u+\beta v)(\gamma u+\delta v)}$ も**真空**と呼ぶ．

$\mathcal{O}$ から逸脱

> $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ のようなものは結合代数をなしていないのだから明らかに非可換世界の数学モデルとして考えた μ-制御代数から逸脱したものである．しかし，このようなところに広げてはじめてさまざまな数学モデルの相互の関係が見えてくるのである．代数を固定していては相互作用は見えないのである．

ΨDO-積公式を使っても「真空」のような元は現れ，

$$v{*}e_{\circ}^{\frac{i}{\hbar}u\circ v} = v{\circ}e_{\circ}^{\frac{i}{\hbar}u\circ v} + \hbar i\,\frac{i}{\hbar}\,v{\circ}e_{\circ}^{\frac{i}{\hbar}u\circ v} = 0$$

である．同様に $e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}*u=0$ である．後でわかることだが，$e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}=\varpi_{00}$ である．大切なことは，われわれはこれを**真空 ϖ_{00} のワイル順序表示が $e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$ で，正規順序表示が $e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}$ である**と考えていることである．

しかし $f(u)*g_\circ(u,v)=f(u)\circ g_\circ(u,v)$ であるから $u*g_\circ(u,v)=0$ となるような $g_\circ(u,v)\neq 0$ は存在しないと思われる[7]．

まったく同様に $\bar{\Psi}$DO-積公式を使っても「真空」のような元は現れ，

$$u*e_\bullet^{-\frac{i}{\hbar}u\bullet v}=u\bullet e_\bullet^{-\frac{i}{\hbar}u\bullet v}+\hbar i\frac{i}{\hbar}\,u\bullet e_\bullet^{-\frac{i}{\hbar}u\bullet v}=0$$

である．後でわかることだが，$e_\bullet^{-\frac{i}{\hbar}u\bullet v}=\bar{\varpi}_{00}$ である．

5.3.2　半逆元（反逆元？）

拡張されたワイル空間ではいろいろ見慣れないことが起こる．たとえば，モイヤル積公式を使った直接計算で次のこともわかる．$u^\bullet=\frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv})$，$u^\circ=\frac{1}{u}(1-e^{-\frac{2i}{\hbar}uv})$ とすると，モイヤル積公式で計算[8]して次がわかる：

$$u^\bullet*u=1,\quad u*u^\bullet=1-\varpi_{00},\quad u*u^\circ=1,\quad u^\circ*u=1-\bar{\varpi}_{00}.$$

同様，$v^\circ=\frac{1}{v}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv})$, $v^\bullet=\frac{1}{u}(1-e^{-\frac{2i}{\hbar}uv})$ とすると，

$$v^\circ*u=1,\quad v*v^\circ=1-\varpi_{00},\quad v*v^\bullet=1,\quad v^\bullet*v=1-\bar{\varpi}_{00},$$

となることが示せる（7.3.1 項参照．しかし実際に計算してみることが大切）．

つまり，座標関数 u,v は右逆元も左逆元も持っているのである．$\frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv})$ などは $u=0$ のところに特異点があるのではなく，$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元である．これらは代数を拡張したときに現れる一般的現象である．

複素共役というものを $\bar{u}=u,\bar{v}=v,\bar{i}=-i$ で反自己同型として定義しておけば，左逆元は右逆元の複素共役の形をしていることがわかる．結合律に慣れすぎていると $u^\bullet=u^\bullet*(u*u^\circ)=(u^\bullet*u)*u^\circ=u^\circ$ となりそうに思えるであろ

---

7)　これは「どの範囲で」ということを明確にしないと意味がない．超関数まで使えば $u\delta(u)=0$ である．

8)　この計算のとき，$\frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv})=\frac{1}{u}-\frac{1}{u}e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$ として別々に計算するのは $\frac{1}{u}$ という $Hol(\mathbb{C})$ に入っていない元を使ってしまうので正しくない．$\frac{1}{u}(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv})$ は収束冪級数に展開して考えるべきものである．

う．するとこれらは同一の真の逆元だから，

$$\frac{\hbar}{2i}(u^\circ - u^\bullet) = \frac{1}{u}\sin\frac{2}{\hbar}uv = 0$$

でなければならない．しかし $u^\circ - u^\bullet = \frac{2i}{\hbar u}\sin(\frac{2}{\hbar}uv)$ であり，これは 0 ではないのだから，上のことは $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中では**結合律は破れている**と素直に考えるべきである．

一方，$u^\bullet * u^\circ$ はモイヤル積公式を使った計算では発散している．しかし，このことがただちに $u^\bullet * u^\circ$ はどの表示方法でも発散していることを意味するかどうかはわからない（しかし $u, u^\bullet, u^\circ$ を 3 つとも含む結合代数が存在しないことは明らか）．

半逆元は一意的ではない．$v^\circ * v = 1 - \varpi$ とすると $v * \varpi = 0$ だから，$v * (v^\circ + \varpi * f(v)) = 1$ となって，これも半逆元となる．

第 1 結合律定理

結合律は上のように一般には破れているのであるが，$\hbar \in [0, \infty)$ について実解析性が保証されている場合には次に述べる一般定理によって $*$- 積の結合律は保証される．次の定理を**第 1 結合律定理**と呼ぶが，証明は簡単であろう．理由は $\hbar$ を形式的変数として扱ってすべて $\hbar$ の形式的冪級数で考えている限り結合律は保証されるから，すべてを形式的 μ-制御代数に埋め込んで考えればよいからである．

定理 5.8　$f(u,v), g(u,v), h(u,v)$ が $\hbar$ に関して実解析的であり，$\hbar = 0$ まで定義できている関数とする．このとき $f*g, g*h, (f*g)*h, f*(g*h)$ が $\hbar = 0$ まで含めて $\hbar$ に関して実解析的に定義されていれば，$(f*g)*h = f*(g*h)$ が成立している．

上のように述べると簡単な定理だが，$\hbar$ に関して実解析的に定義されていることを一般的に調べるのは難しいから，これを調べるには結局実際に計算してみないといけないことが多い．

5.3.3　代数の崩壊

ここで $\mho = (\tau_0, \tau)$ で，$0 < \tau < \frac{1}{2}$ のときには $\mathfrak{H}^{2m+1}_{\mho}$ はほとんど形式的 μ-制御代数になってしまうという定理 5.3 の証明を与える．次の定理を証明するのである．

定理 5.9　$\mho=(\tau_0,\tau)$ で，$0<\tau<\frac{1}{2}$ の場合（ただし $\tau_0=0$ のときは τ_0 を Hol または ∞ と読む）には $\forall a\neq 0$ に対して $R_a\in\mathfrak{R}^3_{\mho}$, $H_a\in\mathcal{T}^3_{\mho}$ があって

$$1=(\mu+ai){\otimes}H_a+R_a \tag{5.32}$$

が成り立つ．

証明　証明は $m=1$ の場合で十分であろう．$X^{\bullet}=\frac{1}{X}{\odot}(1-e_{\odot}^{\frac{2i}{a}X\odot Y})$, $X^{\circ}=\frac{1}{X}{\odot}(1-e_{\odot}^{\frac{-2i}{a}X\odot Y})$ とおく．ただしそれぞれの右辺は正しくは $t=\pm\frac{2i}{a}$ として $\sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^l}{l!}X^{l-1}{\odot}Y^l$ のように無限級数で表示すべき式を簡略化して $\frac{1}{X}{\odot}(1-e_{\odot}^{tX\otimes Y})=\sum_{l=1}^{\infty}\frac{t^l}{l!}X^{l-1}{\odot}Y^l$ のように書いたものである．

自由テンソル代数の結合律より次が成立する：

$$(X^{\bullet}{\otimes}X){\otimes}X^{\circ}-X^{\bullet}{\otimes}(X{\otimes}X^{\circ})=0. \tag{5.33}$$

これを $\mathfrak{R}^3_{\mho}$ で商空間をつくったところで考えれば，計算は 5.3.2 項での $*$-積の計算になるから，$\hbar i=\mu$ としたモイヤル積公式 (5.17) で計算しそれをもとに戻して考えれば次が得られる：

$$X^{\circ}-X^{\bullet}-(1-\frac{i\mu}{a}){\otimes}(e_{\odot}^{-\frac{2i}{a}X\odot Y}{\otimes}X^{\circ}-X^{\bullet}{\otimes}e_{\odot}^{\frac{2i}{a}X\odot Y})\in\mathfrak{R}^3_{\mho}. \tag{5.34}$$

したがって $\langle\mu+ai\rangle$ を $\mu+ai$ で生成される両側イデアルとして $X^{\circ}-X^{\bullet}\in\langle\mu+ai\rangle+\mathfrak{R}^3_{\mho}$ がわかり，したがって次がわかる：

$$\frac{1}{X}{\odot}(e_{\odot}^{\frac{2i}{a}X\odot Y}-e_{\odot}^{\frac{-2i}{a}X\odot Y})\in\langle\mu+ai\rangle+\mathfrak{R}^3_{\mho}.$$

この場合も元の表示は本来ならば無限級数で書くべきところを簡略化してある．再びモイヤル積公式を使って

$$\begin{aligned}&X{\otimes}(\frac{1}{X}{\odot}(e_{\odot}^{\frac{2i}{a}X\odot Y}-e_{\odot}^{\frac{-2i}{a}X\odot Y}))\\&=(e_{\odot}^{\frac{2i}{a}X\odot Y}-e_{\odot}^{\frac{-2i}{a}X\odot Y})-\mu{\otimes}\frac{i}{a}{\otimes}(e_{\odot}^{\frac{2i}{a}X\odot Y}+e_{\odot}^{\frac{-2i}{a}X\odot Y})\in\langle\mu+ai\rangle+\mathfrak{R}^3_{\mho}.\end{aligned}$$

$\mu-ai=\mu+ai-2ai$ に注意すれば，上の式より $\forall\, a\neq 0$ に対して

$$2ai\,e_{\odot}^{-\frac{2i}{a}X\odot Y}\in\langle\mu+ai\rangle+\mathfrak{R}^3_{\mho}$$

が得られる．$\partial_X f$, $\partial_Y f$ は交換子積を使って書かれるから，上の式は

$$(X^m{\odot}Y^n){\otimes}\partial_X^k\partial_Y^l e_{\cdot}^{-\frac{2i}{a}X\odot Y}{\otimes}(X^{m'}{\odot}Y^{n'})\in\langle\mu+ai\rangle+\mathfrak{R}^3_{\mho}$$

も意味する．

すると対称積 $X{\circ}e_{\odot}^{-\frac{2i}{a}X\odot Y}$，$Y{\circ}e_{\odot}^{-\frac{2i}{a}X\odot Y}$ をいったんモイヤル積公式で計算し補題 5.5 を使って $\mathcal{S}^{*2}_{\mho}$ の元にもどして考えるという作業を繰り返すと $(X^m{\odot}Y^n){\odot}e_{\odot}^{-\frac{2i}{a}X\odot Y} \in \langle\mu+ai\rangle+\mathfrak{R}^3_{\mho}$ がわかるから，

$$\Big(\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}\big(\frac{2i}{a}\big)^k(X{\odot}Y)^k\Big){\odot}e_{\odot}^{-\frac{2i}{a}X\odot Y} \in \langle\mu+ai\rangle+\mathfrak{R}^3_{\mho}$$

となる．$m\to\infty$ とすると $1\in\overline{\langle\mu+ai\rangle+\mathfrak{R}^3_{\mho}}$ がわかる．ただし $\overline{A}$ は A の $\mathcal{T}^3_{\mho}$ 内での閉包を表す．これは 1 が $\mathfrak{H}^3_{\mho}$ の中の閉両側イデアル $\overline{\langle\mu+ai\rangle}$ に含まれていることを意味する．$\overline{\langle\mu+ai\rangle}=(\mu+ai)*\mathfrak{H}^3_{\mho}$ だから $(\mu+ai)*\tilde{H}_a=1$ となる $\tilde{H}_a\in\mathfrak{H}^3_{\mho}$ があることになる．これで定理が得られた．（証明終わり）

定理 5.9 と定理 5.1 より次も得られる．

定理 5.10　定理 5.9 と同じ仮定で，フレシェ代数 $(\mathfrak{H}^3_{\mho};*)$ の元 $\mu+ai$ は $a\neq 0$ であれば可逆であり，$\bigcap_{k\geq 0}\mu^k*\mathfrak{H}^3_{\mho}=\{0\}$ である．

> $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ は $*$-積で閉じていないし，積が定義できても結合律が崩れたりしている．2 次の指数関数はこの空間の中に入っている．

第6章　結合律と対称性

数学的に物理学を考えようとするときに，数学の側の公理，公準を強く打ち出すのは，物理学が論理的に開いた系であることを考えれば賢いやり方とはいえまい．この章で代数中心の考え方から，（手作業を重んじる）積公式中心の考え方へ大きく方向を転換する．この変更は結合代数という閉じた系から，ともかく積が計算可能というだけの開いた系へ移行する作業であるが，**こうするだけで数学は物理の感覚に近くなるのである．**

$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ では $*$-積は閉じておらず，閉じる場合でも左右の半逆元のようなものが出てきて結合律が崩れてしまった．しかし $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中の部分空間で，そこでは $*$-積が結合律を満たす場合というものがたくさんある．以下にその1つを与えるが，これを基にするといくらでも例がつくれるであろう．

結合律を満たす部分空間

本来ならば結合律を示してから述べるべきことだが，結合律が成立しているとすると，容易に次の等式が示せる（命題6.4参照）：

$$(u^p * \varpi_{00} * v^q) * (u^r * \varpi_{00} * v^s) = \delta_{q,r} q!(\hbar i)^q * u^p * \varpi_{00} * v^s.$$

これより $E_{p,q} = \frac{1}{\sqrt{(\hbar i)^{p+q} p! q!}} u^p * \varpi_{00} * v^q$, $p, q \in \mathbb{N}$ は行列要素であることがわかる．したがって $\{E_{p,q}\ ;\ p,\ q\ \in \mathbb{N}\}$ は行列環 $M(\infty) = \varinjlim M(k)$ と同型な結合代数を $(\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2); *)$ の中で張っている．

開いた系というのは**不完全**なのではなく，閉じた系をたくさん含む，**可能性に満ちた系**なのである．数学者が開いた系を嫌っていてはいけない．

$(\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2); *)$ は $*$-積に関するいろいろな結合代数を含むが，こういうものを取り出す標準的方法があるわけではない．これらの計算を組織的に考えるためには $*$-積でつくった指数関数が必要になるので次節以降でそれを扱う．

6.1　$*$-指数関数

$*$-積を用いた指数関数 e_*^{tf} を一般的に定義するのは難しい．$\sum \frac{t^k}{k!}(f*)^k$ が収束するなら問題ないが，それは 1 次式の指数関数 e_*^{su+tv} ぐらいまでである．

ワイル空間 $(Hol(\mathbb{C}^2), \mathbb{C}[u,v]; *)$ において，$H \in Hol(\mathbb{C}^2)$ に対して方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = H * f_t, \quad f_0 = f \tag{6.1}$$

を考える．これは，一般には微分方程式ではないが H が多項式の場合には**発展方程式**と呼ばれる微分方程式としての表示ができる．発展方程式は状態の時間発展を記述していると考えられる式なので，数学を使う自然科学のいたるところに登場する．(6.1) 式の初期値 $f_0 = 1$ の実解析的解を（存在していれば）e_*^{tH} と書き，**$*$-指数関数** ($*$-exponential function) と呼ぶ．また初期値 $f_0 = f$ の実解析的解も存在していればそれを $e_*^{tH} * f$ と書き，これを利用して $*$-積も拡張する．**実解析的解の一意性**を基礎にしているのである．

$H*$ が連続の場合

H が多項式の場合には方程式 (6.1) の $H*f_t$ をモイヤル積公式で計算すると線形の偏微分方程式となる．この場合 $H*$ は $Hol(\mathbb{C}^2)$ から自分自身への連続線形写像に拡張できる．$H \in \mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ ならば定理 5.7 より $H*$ は $\forall p > 0$ に対して $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ から自分自身への連続線形写像に拡張できる．こういう場合が好都合なので，そこに話を限って考える．

定理 6.1　$H*$ が連続の場合には，方程式 (6.1) の初期関数を f とする（t に関して実解析的な）解は存在すれば一意的である．

証明　方程式は線形だから，一意性を得るには初期関数 $f_0(u,v) = 0$ の実解析

的解（4.1.1 項の最後のコメント参照）が 0 のみであることを示せばよい．方程式の両辺で $t=0$ とすることにより $\frac{d}{dt}f_t|_{t=0}=0$ がわかる．さらに次々に両辺を t で微分して $t=0$ とすることにより $\frac{d^k}{dt^k}f_t|_{t=0}=0$ もわかる．これより，t に関して実解析的である限り解は 0 のみであることがわかる．この証明方法で，H に対する条件は，$H*$ が連続線形写像になるから $\frac{d^k}{dt^k}(H*F)=H*\frac{d^k}{dt^k}F$ となるというところに使われている．（証明終わり）

方程式 (6.1) の解は一般に存在するとは限らないし，存在したとしても具体的な解の形は H に応じて計算で求めなければならない．上の方程式の解の存在は一般にかなり限定された初期値のときにのみわかる．たとえば $e_*^{\frac{t}{\hbar}(u*v+v*u)}$ を定義しようとすれば

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t,u,v)=\frac{1}{\hbar}(u*v+v*u)*F(t,u,v),\quad F(0,u,v)=1 \tag{6.2}$$

を解くのであるが，扱う微分方程式はそれぞれ次のようになる．

(a)　正規順序表示では $\frac{1}{\hbar}(u*v+v*u)=\frac{1}{\hbar}2u{\circ}v+i$ だから

$$\frac{\partial}{\partial t}F_\circ(t,u,v)=\Big(\frac{1}{\hbar}2u{\circ}v+i\Big)*F_\circ(t,u,v),\quad F_\circ(0,u,v)=1$$

と書き，右辺は ΨDO-積公式で計算して次の偏微分方程式とする：

$$\frac{\partial}{\partial t}F_\circ(t,u,v)=\Big(\frac{1}{\hbar}2u{\circ}v+i\Big){\circ}F_\circ(t,u,v)+2iu{\circ}\partial_uF_\circ(t,u,v).$$

(b)　反正規順序表示では $\frac{1}{\hbar}(u*v+v*u)=\frac{1}{\hbar}2u{\bullet}v-i$ だから (6.2) 式の右辺を $\bar{\Psi}$DO-積公式で計算して次の偏微分方程式とする：

$$\frac{\partial}{\partial t}F_\bullet(t,u,v)=\Big(\frac{1}{\hbar}2u{\circ}v-i\Big){\bullet}F_\bullet(t,u,v)-2iv{\bullet}\partial_vF_\bullet(t,u,v).$$

(c)　ワイル順序表示では $\frac{1}{\hbar}(u*v+v*u)=\frac{2}{\hbar}u{\odot}v$ だから (6.2) 式の右辺はモイヤル積公式で計算するのだが，後のほうでよく使うから $u{\odot}v$ を uv のように $\odot$ を用いずに書くと，

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t,u,v)=\frac{2}{\hbar}uvF+i\{u\partial_uF-v\partial_vF\}+\frac{\hbar}{4}\{2\partial_v\partial_uF\}$$

のようになる．これらは偏微分方程式で，解の存在は一般の初期関数については保証されないものである．しかし，t に関して実解析的解が存在すれば初期

関数に関して一意的である．また解の形がある程度予測できる場合は解の形を仮定してしまって実解析的解の一意性を利用して，この偏微分方程式を常微分方程式系に直して扱うことができる．

量子論的存在

存在しているのは $*$-積のほうであって，それをさまざまな表示方法で計算しているのであるが，1 つの表示方法だけですべてが計算できるわけでなく適宜表示法を使い分けないといけない．これは局所座標系を使って表示し計算しているのに似ているが，同じことではない．

6.1.1 1 次式の $*$-指数関数

$e_*^{t(au+bv)}$ を $e_*^{t(au+bv)} = \sum \frac{1}{k!}(t(au+bv))_*^k$ と定義する．これは方程式 $\frac{d}{dt}f_t(u,v) = (au+bv)*f_t(u,v)$ の初期値 $f_0 = 1$ の解として定義しても同じことである[1]．これを $*$-**指数関数**と呼ぶ．$e_*^{su} = e^{su}$, $e_*^{tv} = e^{tv}$ であることは明らかであろう．

5.2.2 項で述べた 3 種類の積公式で $e_*^{su}*e_*^{tv}$ は次のように与えられる．ここで

ΨDO-積公式：	$e_*^{su} * e_*^{tv} = e_\circ^{su+tv}$
$\bar{\Psi}$DO-積公式：	$e_*^{su} * e_*^{tv} = e^{-\hbar ist} e_\bullet^{su+tv}$
モイヤル積公式：	$e_*^{su} * e_*^{tv} = e^{-\frac{\hbar ist}{2}} e_\cdot^{su+tv}$

$\circ$, $\bullet$, $\cdot$ は普通の可換積だが，それぞれの積公式で使っている可換積を区別するために用いているだけで深い意味はない．

補題 6.1 $*$-指数関数 $e_*^{\alpha u+\beta v}$ は (u,v) に関するワイル順序表示では $e_*^{\alpha u+\beta v} = e_\cdot^{\alpha u+\beta v}$ であり，正規順序表示，反正規順序表示ではそれぞれ

$$e_*^{\alpha u+\beta v} = e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta} e_\circ^{\alpha u+\beta v}, \quad e_*^{\alpha u+\beta v} = e^{-\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta} e_\bullet^{\alpha u+\beta v}$$

のように表示される．これよりとくに $e_*^{su} * e_*^{tv} = e^{-\frac{\hbar i}{2}st} e_*^{su+tv}$ もわかる．

証明 $e_*^{t(\alpha u+\beta v)}$ は微分方程式 $\frac{d}{dt}f_t = (\alpha u+\beta v)*f_t$ の初期値 $f_0 = 1$ の実解析的解として定義するが，正規順序表示では微分方程式

$$\frac{d}{dt}f_t = (\alpha u+\beta v) * f_t = (\alpha u+\beta v)\circ f_t + \hbar i\beta\partial_u f_t \tag{6.3}$$

1) 一般の指数関数の定義のときには t に関して実解析的解ということまで要求する．こうしないと一意性がなくなることがある．

の初期値 1 の解として定義される．定理 6.1 より t に関して実解析的な解は一意的だから，$f_t(u,v) = g_t(\alpha u+\beta v)$ とおいて解を探してもよいのだから $x = \alpha u+\beta v$ とおくと，微分方程式 (6.3) は $\frac{d}{dt}g_t(x) = xg_t(x) + \hbar i\alpha\beta g_t'(x)$ と書き換えられる．これより，$g_t = C(t)e^{tx}$ とおき，定数変化法で解いて $g_t(x) = e^{tx+\frac{1}{2}\hbar i\alpha\beta t^2}$ がわかる．つまり，$e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta t^2}e_\circ^{t(\alpha u+\beta v)}$ である．反正規順序表示のほうも同様である．ワイル順序表示では (6.3) 式の右辺は

$$(\alpha u + \beta v)\cdot f + \frac{\hbar i}{2}(\beta\partial_u - \alpha\partial_v)f \tag{6.4}$$

のように計算されるが $f_t = g_t(\alpha u+\beta v)$ のようにおくと 2 項目は消えて微分方程式は単純に $\frac{d}{dt}g_t(x) = x\cdot g_t(x)$ となるだけである．したがって，$e_{\cdot}^{t(\alpha u+\beta v)}$ が得られる．$t = 1$ とおいて補題が得られる．（証明終わり）

表示の限界

> 微分方程式などを考えたときには解がどのように書かれるかは元の表示方法によって変わってくるし，ある種の元は特定の順序表示でないと意味を持たないといったことが起こる．これは元に応じて作用素として表現するときの表現空間を変えねばならないことを意味する．

実解析的解の一意性により指数法則

$$e_*^{(s+t)(\alpha u+\beta v)} = e_*^{s(\alpha u+\beta v)} * e_*^{t(\alpha u+\beta v)} \tag{6.5}$$

がわかるが，これはそれぞれの表示では次のような積の公式となる．

ワイル順序表示	$e_{\cdot}^{sX} * e_{\cdot}^{tX} = e_{\cdot}^{(s+t)X}$	
正規順序表示	$e_\circ^{sX} * e_\circ^{tX} = e^{\hbar ist\alpha\beta}e_\circ^{(s+t)X}$	$(X = \alpha u+\beta v)$
反正規順序表示	$e_\bullet^{sX} * e_\bullet^{tX} = e^{-\hbar ist\alpha\beta}e_\bullet^{(s+t)X}$	

6.1.2 相互変換 (Intertwiner)

ワイル代数には正規順序表示，反正規順序表示，ワイル順序表示という 3 種類の表示法があった．しかも，これらの表示方法は量子正準共役対 (u,v) の取り方に依存していた．つまり，別の量子正準共役対 (u',v') を使えば，また別の順序表示が (u',v') に関して得られるわけである．

表示方法によって計算できるものの範囲が変わるが，著者はこれを**存在している 1 つの物のいろいろな表示**と考えている（これはきわめて大きい考え方の変更であって，$*$-積の世界が実在で，それをいろいろに表示しているのだと考えている）.

この節ではまず (u,v) に関する正規順序表示とワイル順序表示の間の相互変換公式を考え，次に互いに線形に結び付いている量子正準共役対を使ってそれに関する正規順序表示間の相互変換を考える．つまり (u,v) に関する正規順序表示と (u',v') に関する正規順序表示の間の相互変換を問題にする．ただし，(u',v') と (u,v) とは線形変換（シンプレクティック変換）

$$\begin{bmatrix} u' \\ v' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad ad-bc=1 \tag{6.6}$$

で結ばれているものとしている.

まず，(u,v) に関する正規順序表示とワイル順序表示との間の相互変換を考える．相互変換公式を得る原理は $*$-指数関数 $e_*^{\alpha u+\beta v}$ のワイル順序表示 $e^{\alpha u+\beta v}$ と正規順序表示 $e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta}e_\circ^{\alpha u+\beta v}$ とは同じものとしなければならないということである（補題6.1 参照）.

指数関数の張る線形空間は C^∞-関数の中で稠密だから，

$$e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta}e_\circ^{\alpha u+\beta v} = e^{\frac{\hbar i}{2}\partial_u\partial_v}e_\circ^{\alpha u+\beta v}$$

であることを考えれば，ワイル順序表示から正規順序表示への相互変換は

$$I_\cdot^\circ f = e^{\frac{\hbar i}{2}\partial_u\partial_v}f \quad \left(\text{多変数では } e^{\frac{\hbar i}{2}\sum_i \partial_{u_i}\partial_{v_i}}f\right) \tag{6.7}$$

のような無限階の微分作用素として定義しなければならない.

(u,v) に関する正規順序表示と (u',v') に関する正規順序表示の間の相互変換公式を得る原理は $*$-指数関数 $e_*^{\alpha u+\beta v}$ と $e_*^{\alpha' u'+\beta' v'}$ は量子正準共役対 (u,v) と (u',v') が線形関係式で結ばれており，かつ $\alpha u+\beta v=\alpha' u'+\beta' v'$ ならば当然一致するはずだということである.

補題6.1 を量子正準共役対 (u',v') に適用し，$\diamond$ を (u',v') に関する正規順序表示のときに使う可換積を表す記号として

$$e_*^{\alpha' u'+\beta' v'} = e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha'\beta'}e_\diamond^{\alpha' u'+\beta' v'}$$

が得られる．さらに $\alpha u+\beta v=\alpha' u'+\beta' v'$ であるとし，(u,v) と (u',v') は (6.6) 式で結ばれているとする．すると，$e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha\beta}e_{\circ}^{\alpha u+\beta v}$ と $e^{\frac{\hbar i}{2}\alpha'\beta'}e_{\diamond}^{\alpha' u'+\beta' v'}$ とは同一視しなければならないから，相互変換 $I_{\circ}^{\diamond}$ は稠密な部分空間で定義された線形写像

$$I_{\circ}^{\diamond}f=e^{\frac{\hbar i}{2}\partial_{u'}\partial_{v'}-\frac{\hbar i}{2}\partial_u\partial_v}f \tag{6.8}$$

として定義される．正確に述べれば，(u,v) と (u',v') とが (6.6) 式で互いに結び付いている場合には作用素

$$\partial_{u'}\partial_{v'}-\partial_u\partial_v=-bd\partial_u^2+(ad+bc-1)\partial_u\partial_v-ac\partial_v^2$$

の指数関数を考え

$$e^{-bd\partial_u^2+(ad+bc-1)\partial_u\partial_v-ac\partial_v^2}f(u,v)=g(u,v)$$

として得られた $g(u,v)$ の変数 (u,v) を $(du'-bv',-cv'+av')$ に置き換えて $I_{\circ}^{\diamond}f(u,v)$ を定義するのである．つまり，

$$I_{\circ}^{\diamond}f(u,v)=g(du'-bv',-cv'+av')$$

である．これらは次のような空間に拡張される．

定理 6.2　$I_{\circ}^{\cdot}$, $I_{\circ}^{\diamond}$ は $0<p\le 2$ のとき，$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ から自分自身への双連続同型写像に拡張される．しかし，これは $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ 全体には拡張されない．

$0<p\le 2$ のときは $I_{\circ}^{\diamond}$ は $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)_{\circ};*)$ から $(\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)_{\diamond};*)$ の上への代数としての同型写像である．$I_{\circ}^{\cdot}$ についても同様である．

証明　まず，命題 5.2 によりセミノルム系 (5.27) は次のセミノルム系に置き換えてよいということに注意する．

$\tau=\frac{1}{p}$ とおき，関数 $f=\sum a_{m,n}u^m v^n$ に対して

$$\|f\|_{\tau,s}=\sum_{m,n}|a_{m,n}|(m+n)^{\tau(m+n)}s^{\tau(m+n)},\quad s>0.$$

このセミノルム系は $\forall p>0$ で $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ と同じフレシェ空間を定義する．

$\partial_u\partial_v$, ∂_u^2, ∂_v^2 などは互いに可換だから，結局 $e^{\alpha\partial_u\partial_v}$, $e^{\beta\partial_u^2}$, $e^{\gamma\partial_v^2}$ が $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ から自分自身への連続な線形同型写像に拡張できることを示せばよい．

$\forall f = \sum a_{m,n} u^m v^n$ について

$$e^{\alpha \partial_u \partial_v} f = \sum_{m,n,k} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{(m+k)!}{k!} \frac{(n+k)!}{k!} a_{m+k,n+k} u^m v^n$$

であるから，

$$\|e^{\alpha\partial_u\partial_v} f\|_{\tau,s} =$$

$$\sum_{m,n} \sum_{0 \le k \le m \wedge n} \frac{\alpha^k}{k!} \frac{m!}{(m-k)!} \frac{n!}{(n-k)!} |a_{m,n}| (m+n-2k)^{\tau(m+n-2k)} s^{\tau(m+n-2k)}$$

$$< \sum_{m,n} \sum_{0 \le k \le m \wedge n} \frac{\alpha^k}{k!} (mn)^{(1-\tau)k} s^{\tau(m+n)} |a_{m,n}| (m+n)^{\tau(m+n)}.$$

$\frac{1}{2} \le \tau$ であるならば，$(mn)^{(1-\tau)} \le K(m+n)$ がわかり，これより

$$\|e^{\alpha\partial_u\partial_v} f\|_{\tau,s} \le |a_{m,n}| (m+n)^{\tau(m+n)} (e^{K/\tau} \alpha s)^{\tau(m+n)}$$

となる．$p \le 2$ のときには $e^{-\alpha\partial_u\partial_v}$ は $e^{\alpha\partial_u\partial_v}$ の逆写像なので，$e^{\alpha\partial_u\partial_v}$ が $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ から自身への線形同型を与えている．

同様の証明で $e^{\beta\partial_u^2}$ および $e^{\gamma\partial_v^2}$ の場合にも同様の結果が得られる．また，$p > 2$ の場合には上の写像は全体では定義できない． （証明終わり）

次のことが成り立つことに注目しよう．任意の順序表示間の相互変換 $I_{\diamond'}^{\bullet}$, $I_{\diamond}^{\diamond'}$, $I_{\bullet}^{\diamond}$ に対して

$$I_{\diamond'}^{\bullet} I_{\diamond}^{\diamond'} I_{\bullet}^{\diamond} : \mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2) \to \mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2) \quad \text{は恒等写像.} \tag{6.9}$$

正規順序表示はワイル順序表示に比べて対称性が悪いのだが，(6.9) 式が成立することから，相互変換を通じて移り合うものを同じと見ることが許されるわけである．$\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^2)$ の元については，次のような同一視の原則を採用する．

定義 6.1 量子正準共役対 $(u, v; \circ)$ による正規順序表示で $A_\circ$ と表示され，別の量子正準共役対 $(u', v'; \diamond)$ による正規順序表示で $B_\diamond$ と表示される元があるとする．さらに (u, v) と (u', v') は線形同型で移り合っているものとする．このとき，$A = B$ であるとは量子正準共役対による正規順序表示が相互変換により移り合う，つまり $I_\circ^\diamond(A_\circ) = B_\diamond$ となることをいう．

これは多様体を局所座標系の貼り合わせと理解するのに似た理解である．

6.1.3　拡張された相互変換の性質

相互変換は空間 $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ には拡張できない．相互変換がどの程度の関数空間まで拡張できるかはよくわかっていないが，相互変換を発展方程式の一部と見ると，$e^{au^2+bv^2+2cuv}$ のような 2 次式の指数関数には相互変換を定義することができる．

しかしここで奇妙なことが起こる．この空間での相互変換は $\sqrt{\ }$ の不定性が出てきて 2 対 2 の写像としてしか定義できないのである．(6.9) 式は $f\in\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$, $p>2$ に対しても両辺が定義できていれば成立するように思えるであろうが，実は exp（2 次式）という $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の部分集合で $I_\diamond^\circ{}_\prime I_\diamond^{\diamond\prime}I_\circ^\diamond=\pm I_\circ^\circ$ となり，$\pm$ **の不定性を含んだ形でしか定義されない**ことがわかるのである．

(6.9) 式が成立していないと同値関係として使えないから困るわけで，定義 6.1 をそのまま言葉どおりの意味で採用するわけにはいかなくなり，いつでも $\pm$ **の曖昧さを含んだ形でしか同値関係が定義できない**といったことが起こるのである．　（このことを逆手にとって曖昧被覆というのを後で定義する．）

まず次のような時間発展の方程式を考える：　（"時間" といったが，物理的意味での時間ではなく単なるパラメーターである．）

$$\frac{\partial}{\partial t}f=\hbar i\partial_u\partial_v f. \tag{6.10}$$

これは t について実解析的解は存在すれば一意的であり，初期関数 e^{au+bv} の解は $e^{\hbar iabt}e^{au+bv}$ で与えられている．そこで，初期関数 $e^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2+2\gamma uv)}$ の解を得るために $f=s(t)e^{\frac{1}{\hbar}(\phi_1(t)u^2+\phi_2(t)v^2+\phi_3(t)2uv)}$ のようにおくと (6.10) 式は常微分方程式系

$$\begin{aligned}&(\phi_1'(t),\phi_2'(t),\phi_3'(t);s'(t))\\&=\bigl(4i\phi_1(t)\phi_3(t),\,4i\phi_2(t)\phi_3(t),\,2i\bigl(\phi_1(t)\phi_2(t)+\phi_3(t)^2\bigr);\,2is(t)\phi_3(t)\bigr)\end{aligned} \tag{6.11}$$

に変わる[2]．最初の 2 つから

$$\phi_1(t)=\alpha e^{4i\int_0^t\phi_3(\tau)d\tau},\quad \phi_2(t)=\beta e^{4i\int_0^t\phi_3(\tau)d\tau}$$

だから，$x(t)=\int_0^t\phi_3(\tau)d\tau$ とおいて

$$x''(t)=2i\alpha\beta e^{8ix(t)}+2ix'(t)^2,\quad x(0)=0,\ x'(0)=\gamma$$

2)　このやり方をリー群論的方法という．方程式がどの辺で閉じるかがわかっていて，実解析性が期待できるときには強力な方法である．この方法は exp（3 次式）には使えないが，exp（2 次式以下に漸近展開される関数）には拡張できる．

であり，x を独立変数のように思って $\phi_3(t) = p(x(t))$ とおけば，$\phi_3 = x'$ だから $x''(t) = p\frac{dp}{dx}$ がわかる．これより

$$\frac{1}{2}\frac{dp^2}{dx} - 2ip^2 = 2i\alpha\beta e^{8ix}, \quad p(0) = \gamma,$$

がわかり，$p^2(x) = (\gamma^2 - \alpha\beta)e^{4ix} + \alpha\beta e^{8ix}$ を得る．したがって $P(t) = 1-4i\gamma t-4(\gamma^2-\alpha\beta)t^2$ として，次が得られる：

$$e^{\hbar t i\partial_u\partial_v} e^{\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2+2\gamma uv)} = \frac{1}{\sqrt{P(t)}}\, e^{\frac{1}{P(t)}\frac{1}{\hbar}(\alpha u^2+\beta v^2+(\gamma-2i(\gamma^2-\alpha\beta)t)2uv)}. \tag{6.12}$$

$\sqrt{P(t)}$ の $\pm$ の不定性は α, β, γ 全体にわたって処理することはできない．

同じものの表示法の変更と思っている相互変換が不定性を持ってくるということはきわめて重要な意味を持っている．これを何かリーマン面のような被覆空間を考えてその空間どうしの 1 対 1 の変換として処理できると考えると，単連結である $SL_{\mathbb{C}}(2)$ の連結な 2 重被覆空間が得られるという矛盾につきあたるのである．詳細は次章に譲るが，どうやらこの不定性をそのまま許容して数学の対象とすべきなのである．いまのところ，このようなものは [4] とか [13] の中で扱われている gerbe という概念で処理するしか手段がないようだが，素直に認めてしまうのも 1 つの方法のように思われる．

式が複雑なので $(a, b, c; s) \in \mathbb{C}^3 \times \mathbb{C}_*$ は $se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)} \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ を表すという約束の簡略記号を用いることにする：

$$(a, b, c; s) \Longleftrightarrow se^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}.$$

$t = \frac{1}{2}$ として，ワイル順序表示から正規順序表示への相互変換 $I^{\circ}_{\cdot}$ が得られる：

$$(a', b', c'; s') = I^{\circ}_{\cdot}(a, b, c; s) = \frac{1}{1-2ic-D}(a, b, c - iD; s\sqrt{1-2ic-D}). \tag{6.13}$$

ただし $D = c^2 - ab$（これも「判別式」と呼ぶ）である．

命題 6.1 $I^{\circ}_{\cdot}(e_{\cdot}^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\cdot v)})$ は $(1-ci)^2+ab = 0$ のところを除いた全域で定義される．

ワイル順序表示で $e^{\frac{1}{\hbar}((\sqrt{a}u\pm\sqrt{b}v)^2-2iuv)}$ のような元は (u, v) に関する正規順序表示に直せない元である．たとえば共役真空 $2e^{-\frac{2i}{\hbar}uv}$ は正規順序では表示できない．

容易に $D' = (c')^2 - a'b' = \frac{D}{1-2ic-D}$ がわかるので，逆変換 $I_\circ^\cdot = (I_\cdot^\circ)^{-1}$ はすぐに計算できるが，これは $t = -\frac{1}{2}$ とおいて得られるものと一致する．実際それは

$$I_\circ^\cdot(a', b', c'; s) = \frac{1}{1+2ic'-D'}(a', b', c'+iD'; s'\sqrt{1+2ic'-D'})$$

である．とくに $I_\cdot^\circ(2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}) = \sqrt{1}\ e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}$ が確かめられる．これはワイル順序表示での真空が（$\sqrt{1} = \pm 1$ の曖昧さはあるが）正規順序の真空に相互変換されるといっているのである．

$e^{t\hbar i\partial_u^2}$ の場合

(u, v) に関する正規順序表示から $(u', v') = (u+v, v)$ に関する正規順序表示への相互変換は $e^{-\frac{\hbar i}{2}\partial_u^2}$ で与えられることに注意して，微分作用素 $\frac{d}{d\tau}f = \hbar i\partial_u^2 f$ を考え，次のようにおく：

$$f = s(\tau)e^{\frac{1}{\hbar}(\phi_1(\tau)u^2+\phi_2(\tau)v^2+2\phi_3(\tau)uv)}. \tag{6.14}$$

すると，常微分方程式系

$$\begin{aligned}&(\phi_1'(\tau), \phi_2'(\tau),\ \phi_3'(\tau);\ s'(\tau))\\ &\quad=(4i\phi_1(\tau)^2,\ 4i\phi_3(\tau)^2,\ 4i\phi_1(\tau)\phi_3(\tau);\ 2i\phi_1(\tau)s(\tau))\end{aligned}$$

が得られる．これを初期データ $(\phi_1(0), \phi_2(0), \phi_3(0); s(0)) = (a, b, c; s)$ で解いて (6.14) 式の解は次で与えられる：

$$(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t); s(t)) = \left(\frac{a}{1-4iat}, \frac{b+4iDt}{1-4iat}, \frac{c}{1-4iat}; \frac{s}{\sqrt{1-4iat}}\right). \tag{6.15}$$

ただし $D = c^2 - ab$ である．$t = -\frac{1}{2}$ とおいて相互変換が得られる：

$$(a'', b'', c''; s'') = I_\circ^\diamond(a, b, c; s) = \frac{1}{1+2ia}(a,\ b-2iD, c;\ s\sqrt{1+2ia}). \tag{6.16}$$

$D'' = (c'')^2 - a''b'' = \frac{D}{1+2ia}$ である．(6.16) 式の逆対応は $t = \frac{1}{2}$ とおいて得られる：

$$(a, b, c; s) = \left(\frac{a''}{1-2ia''}, \frac{b''+2iD''}{1-2ia''}, \frac{c''}{1-2ia''}; \frac{s''}{\sqrt{1-2ia''}}\right).$$

同様の計算で $e^{t\hbar i\partial_v^2}$ を (6.14) 式と同様に作用素 $\frac{d}{d\tau}f = \hbar i\partial_v^2 f$ の解として定義する．初期条件 $(\phi_1(0), \phi_2(0), \phi_3(0); s(0)) = (a, b, c; s)$ の解は

$$(\phi_1(t), \phi_2(t), \phi_3(t); s(t)) = \left(\frac{a+4iDt}{1-4ibt}, \frac{b}{1-4ibt}, \frac{c}{1-4ibt}; \frac{s}{\sqrt{1-4ibt}}\right) \tag{6.17}$$

で与えられる．これより，(u, v) に関する正規順序表示から $(u, u+v)$ に関する正規順序表示への相互変換は次で与えられる：

$$I_{\circ}^{\bullet}(a, b, c; s) = \frac{1}{1-2ib}(a+2iD, b, c; s\sqrt{1-2ib})$$

これらの結果を総合して，2 次の指数関数の空間に働く一般の相互変換は (6.13), (6.15), (6.17) 式を合成して得られることがわかる．

注目すべきことは 2 次式の指数関数の空間の間の相互変換は**振幅の部分に必ず $\pm$ の不定性を持ってしまう**ということである．相互変換は発展方程式で t の値が $\frac{1}{2}$ のようなところとして定義されているので，$t=0$ のところに連続的につなげる必要はない．これが指数関数の定義のときと違うところである．

後で，2 対 2 対応とか，2 対 2 位相同型といったものを考える．

注意 6.1　ワイル順序表示から正規順序表示への相互変換は多変数の場合には $e^{\frac{\hbar i}{2}\sum \partial_{u_i}\partial_{v_i}}$ で定義される．これも $\mathcal{E}_2(\mathbb{C}^{2m})$ までは問題なく定義されるが $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^{2m})$ までは拡張できない．しかし 2 次の指数関数のところでは上に述べたリー群的方法で計算できる．結果はやはり振幅の部分に必ず $\pm$ の不定性を持ってしまう．

6.2　1 次式の指数関数を使う関数の拡張

6.1.1 項で 1 次式についてだけだが，$*$-積の意味での指数関数が定義できているので，これをもとにして $*$-積の意味での関数を定義しておこう．

6.2.1　フーリエ変換を使う積の拡張

6.3.1 項でも取り扱うが，台がコンパクトな $\mathbb{R}$ 上の連続関数 $\hat{f}(t)$ に対してそのフーリエ (Fourier) 変換は $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t)e^{itz}\,dt$ で与えられる．ただし $dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}dt$ である．$\hat{f}(t)$ は台がコンパクトな超関数であってもよく，いずれの場合も $f(z)$ は整関数として定義できる．

e_*^{itH} が $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ の元として定義されていて t に関して連続になっている場合，$f_*(H)$ という元を下の積分（普通のリーマン積分）で定義する：

$$f_*(H) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e_*^{itH} dt. \quad \left(\text{これが何をやっているのかわからない場合には第 12 章の群論的積分の項参照.}\right) \tag{6.18}$$

$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ がフレシェ空間なので，右辺が $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ の元として定義できることは明らかであろう．$\hat{f}(t)$ の台がコンパクトでなくても右辺が定義できれば上のように書くことにする．

$\hat{f}(t)$ を台がコンパクトな連続関数（実際は超関数でもよい）とし，整関数 $f(z)$ が $f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{itz} dt$ のように与えられているとする．このとき $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ の元 $f_*(u+iv)$ を

$$f_*(u+iv) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e_*^{it(u+iv)} dt$$

と定義する．そして $f_*(u+iv)$ のワイル順序表示，正規順序表示が

$$\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e_{\cdot}^{t(u+iv)} dt, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{-\frac{\hbar t^2}{2}} e_{\circ}^{t(u+iv)} dt$$

であると考え，反正規順序表示が $\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(t) e^{\frac{\hbar t^2}{2}} e_{\bullet}^{t(u+iv)} dt$ であると考える．どの表示でも $f_*(u+iv)$ は $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ の元である．これらは相互変換で移り合うから拡張されたワイル代数としての元を定義していると考えてよい．

別の元 $\hat{g}(t)$ があって

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t) e^{itz} dt, \quad g_*(u+iv) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{g}(t) e_*^{it(u+iv)} dt$$

のとき，積 $f(u+iv) * g(u+iv)$ は指数法則 (6.5) を使って

$$f(u+iv) * g(u+iv) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\tau - s) \hat{g}(s) ds \right) e_*^{i\tau(u+iv)} d\tau$$

と合成積 (convolution) で計算される．ただし，上の表示では u, v は複素平面上を動く変数であり，$u + iv$ と書かれているからといって u, v が実数に制限されているわけではない．

補題 6.1 により (u, v) に関する正規順序表示では $e_*^{t(u+iv)} = e^{-\frac{\hbar t^2}{2}} e_{\circ}^{t(u+iv)}$ であるから $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ の元であり，しかも $e^{-\frac{\hbar t^2}{2}}$ の項があるから $\hbar > 0$ である限りフーリエ変換の収束性はかなりよくなり，積分は $\hat{f}$ の台がコンパクトでなくても収束する．しかし，このことが逆に奇妙な結果も生み出すのである．

$\forall\zeta\in\mathbb{C}$ に対して $\xi=\zeta+u+iv$ とおくと，

$$-\frac{\hbar}{2}t^2+\xi t=-\frac{\hbar}{2}\left(t-\frac{1}{\hbar}\xi\right)^2+\frac{1}{2\hbar}\xi^2$$

と変形して考えれば簡単な計算で $\lim_{t\to\pm\infty}e_*^{t(\zeta+u+iv)}=0$ であり，かつ

$$\int_{-\infty}^{\infty}e_*^{it(-i)(\zeta+u+iv)}dt=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\hbar t^2}{2}}e_\circ^{t(\zeta+u+iv)}dt \tag{6.19}$$

が存在することがわかる．しかし，この収束は $\zeta+u+iv$ を任意に固定したときの収束（各点収束）であって，被積分関数が $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ の元だからといって，収束した先が $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ の元であるという保証はない．

一方，超関数のほうでデルタ関数は $\delta(x)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}dt$ と表示されるから，(6.18) 式に基づいて，(6.19) 式の左辺を $\delta_*((-i)(\zeta+u+iv))$ のように書いてもよいであろう．さらに $e^{-\frac{x^2}{2a}}$ のフーリエ変換が $\sqrt{a}e^{-\frac{a\xi^2}{2}}$ であることを使えば (6.19) 式の右辺は

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{\hbar t^2}{2}}e_\circ^{it(-i)(\zeta+u+iv)}dt=\sqrt{\frac{1}{\hbar}}e_\circ^{\frac{1}{2\hbar}(\zeta+u+iv)^2} \tag{6.20}$$

となるから $\delta_*((-i)(\zeta+u+iv))$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元であることがわかる．

$\delta_*((-i)(\zeta+u+iv))$ は $*$-積の世界ではデルタ関数と似た性質を持ち ΨDO-積公式を使った直接計算で，超関数の $x\delta(x)=0$ と同様に，

$$(\zeta+u+iv)*e_\circ^{-\frac{1}{2\hbar}(\zeta+u+iv)^2}=e_\circ^{-\frac{1}{2\hbar}(\zeta+u+iv)^2}*(\zeta+u+iv)=0 \tag{6.21}$$

となることがわかる．しかし (6.19) 式はワイル順序表示では発散する．

この例でわかるように，**使っている積公式に応じて計算できる範囲がかなり違ってくる**のである．定義されている $*$-積と，式を書くために使っている普通の可換な積との関係を考えると，普通の可換な積は元の表示方法を一定にするという役割を負っているだけの，いわば**補助線**だったわけである．

6.2.2　ラプラス変換を使う積の拡張

一方，**ラプラス変換** (Laplase transform) は

$$V(p)=\int_0^{\infty}e^{-pt}F(t)dt \tag{6.22}$$

であるが，

$$p\int_0^{\infty}e^{-pt}dt=1,\quad p\int_{-\infty}^{0}e^{pt}dt=1$$

に注目すると，$\forall\zeta \in \mathbb{C}$ に対して次の 2 つの積分

$$(\zeta+u+iv)_{-}^{-1} = \int_{-\infty}^{0} e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt, \quad (\zeta+u+iv)_{+}^{-1} = -\int_{0}^{\infty} e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt \quad (6.23)$$

は正規順序表示では $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元として存在し，しかも次のことがわかる．

命題 6.2 ΨDO-積公式で計算する限り，$(\zeta+u+iv)_{-}^{-1}$, $(\zeta+u+iv)_{+}^{-1}$ はどちらも $\zeta+u+iv$ の逆元である．さらに，$(\zeta+u+iv)_{-}^{-1}$, $(\zeta+u+iv)_{+}^{-1}$ はどちらも ζ に関して正則になっている．

証明 逆元であることを確かめるには，次のように計算すればよい：

$$(\zeta+u+iv)*\int_{-\infty}^{0} e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt = \int_{-\infty}^{0} \frac{d}{dt}e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt = 1 - \lim_{t\to-\infty} e_*^{t(\zeta+u+iv)} = 1.$$

$\int_{-\infty}^{0} e_*^{t(u+iv)}dt*(\zeta+u+iv)$ も同様である．正則性を見るには

$$\int_{-\infty}^{0} e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt = \int_{-\infty}^{0} e_\circ^{-\frac{\hbar t^2}{2}+t(\zeta+u+iv)}dt$$

と変形してみればよい．（証明終わり）

(6.20) 式を使って 2 つの逆元の差

$$(\zeta+u+iv)_{-}^{-1} - (\zeta+u+iv)_{+}^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} e_*^{t(\zeta+u+iv)}dt$$

も求められる．まったく同様に，$e_*^{it(\zeta+u-iv)}$ についても考えることができる．

新しい考え方

$(\zeta+u+iv)_{\pm}^{-1}$ は正規順序表示でないと表示できず，ワイル順序表示はできない．このようなものは意味があるのだろうか？ 表示方法を局所座標系のように考えてしまうと，このようなことはあっても不思議なことではない．しかし，非可換代数の順序付けの問題を局所座標系のように考えてよいかどうかはもっとつきつめてみる必要はある．

このように，$*$-積の世界は普通の可換積の入った世界から見るとかなりデフォルメされており，普通の世界で見ると超関数としてしか扱えないような関数が普通の関数としての表示を持ったり，1 つの元に逆元が 2 つ出てきたりする．これは面白いが，半面困った現象で

$$\begin{aligned}(\zeta+u+iv)_{+}^{-1} &= (\zeta+u+iv)_{+}^{-1}*\big((\zeta+u+iv)*(\zeta+u+iv)_{-}^{-1}\big)\\ &\neq\big((\zeta+u+iv)_{+}^{-1}*(\zeta+u+iv)\big)*(\zeta+u+iv)_{-}^{-1} = (\zeta+u+iv)_{-}^{-1}\end{aligned}$$

であるから**結合律を壊している**．4.2.3 項で，ワイル代数を

$$u:\ f(x) \to xf(x), \qquad v:\ f(x) \to i\hbar\partial_x f(x)$$

のような演算子で生成する代数を抽象化したものとして定義したのだが，演算子の代数ならば結合律はいつでも成立するのに対して，上のようなところまで拡張されたものには結合律はないのだからこれは演算子の枠を越えた拡張になっていると思わないといけない（7.3.3 項も参照）．上の例では正規順序表示で $(\zeta+u+iv)_+^{-1} * (\zeta+u+iv)_-^{-1}$ は発散している．奇妙なのは $\forall\zeta \in \mathbb{C}$ に対して逆元

$$(\zeta+u+iv)_+^{-1}, \quad (\zeta+u-iv)_+^{-1} \ \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$$

があるということである．これは $\mathrm{Spec}(u+iv) = \emptyset$, $\mathrm{Spec}(u-iv) = \emptyset$ ということであるが，このような元は**絶対可逆元**と呼ばれていた．

> 絶対可逆元は逆元のほうを優先させて考えて，漸近展開で考える．これは感覚的には無限遠方でのテイラー展開である．

命題 6.2 はかなり危険なことを述べていて，（u, v を実数に制限したりして）$z = u + iv$ を 1 つの変数のように考え $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中で u, v に関する正規順序表示で考えるときには **z に数を代入すると発散する**といっているのである．正規順序表示で $h_\circ(z, \bar{z})$ のようなものを考えるときにはそれぞれ $z^{-1}, \bar{z}^{-1}$ で展開して，漸近展開で考えたものしか意味がないのである．したがって $z = u + iv$ を含んだ計算をするときにはつねに「どの代数の中での計算か」を明示しなければならない．**不用意に計算すれば発散の憂目にあうのである**．

上では「正規順序表示で計算する」という述べ方をしているが，**$*$-積の逆元の有り無しは表示の問題**ではないと考えれば，この注釈は不要であろう．

> **微積分の中でも**
>
> このように述べてくると何か大変なことが起こっているような印象を持つかもしれないのだが，実はこのことは微分方程式の定数変化法による解法（例 4.3 参照）のところですでに顔を出しているのである．

6.3　実数への制限

前節までの計算を見れば u, v を複素変数でなく実変数として扱うと，$*$-積が結合律を保って定義できる範囲が広くなることが読みとれる．

$\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ は空間としては $SL_{\mathbb{C}}(2)$ の変換で不変であるが，$0 < p \leq 2$ でないと $*$-積に関して結合代数になっていなかった．これでは面白い元はあまり扱えない．そこでこの節では $SL_{\mathbb{C}}(2)$-対称性をあきらめて $SL_{\mathbb{R}}(2)$-不変で我慢することにして，そのかわりもう少し広い関数族に結合律を満たす $*$-積を定義することを考えよう．

> One must break symmetry in order to keep associativity.
> しかし，結合律を欲しがっているのは人間のほうだけで，自然はそんなことはおかまいなしである．

これを見るにはフーリエ変換の公式を少しマスターしなければならない．これのルールは確立しているから，さほど面倒ではない．ここでは完全にユーザーの立場でフーリエ変換を扱う．

6.3.1　フーリエ変換

$\mathbb{R}^n$ 上の C^∞-関数で台がコンパクトなものの全体を $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ とし，

$$\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} \rangle = \sum_i \xi_i x^i, \quad \text{đ}x = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} dx^1 \cdots dx^n, \quad \text{đ}\xi = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} d\xi_1 \cdots d\xi_n$$

とする．$\text{đ}t_i = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dt_i$ である．台がコンパクトな $\mathbb{R}^n$ 上の連続関数 $f(\boldsymbol{x})$ に対してその**フーリエ変換**というのは

$$\hat{f}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} \rangle} f(\boldsymbol{x}) \text{đ}\boldsymbol{x} \tag{6.24}$$

で定義される積分変換のことである．項別微分ができるからこの場合は $\hat{f}(\boldsymbol{\xi})$ は $\mathbb{C}^n$ 上で複素正則関数となる．しかし $\hat{f}$ は f が $\mathbb{R}^n$ 上で可積分 $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ならフーリエ変換は定義できる．**フーリエ逆変換**は

$$f(\boldsymbol{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(\boldsymbol{\xi}) e^{-i\langle \boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x} \rangle} \text{đ}\boldsymbol{\xi} \tag{6.25}$$

で与えられる．形式的に複素共役をつくると逆変換になっているのだから，定義される範囲や注意は f と $\hat{f}$ とを入れ換えてそのままあてはまる．

フーリエ変換は超関数まで拡張されて定義できるが，これがどの程度の関数族に属するかの判定をするためにいろいろな注意がいる．それをまとめておこう．

$\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}$ をそれぞれフーリエ変換，フーリエ逆変換の記号とする．フーリエ変換はソボレフ (Sobolev) 空間族と呼ばれる次のような関数族で考えるほうが適している．$x_1, \cdots, x_n$ を $\mathbb{R}^n$ の座標関数とし，$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$, $\partial^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $D^\alpha = (i\partial_{x_1})^{\alpha_1} \cdots (i\partial_{x_n})^{\alpha_n}$ という多重添字法を用いることにする．

$H^s(\mathbb{R}^n)$ を超関数としての s 階までの微分がすべて $L_2(\mathbb{R}^n)$ に属する L_2-関数の全体とする ($H^0(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n)$)．このようにいうと難しく聞こえるが，まず s 階までの微分をすべて使う内積を $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ で考えておき，そのノルムに関して完備化した空間を考えればよいのである．

$H^{-s}(\mathbb{R}^n)$ を $H^s(\mathbb{R}^n)$ の L_2-内積に関する双対空間とする．さらに，

$$W_r^s(\mathbb{R}^n) = \{f \in H^s(\mathbb{R}^n); x^\alpha f(x) \in H^s(\mathbb{R}^n),\ |\alpha| \le r\},$$

s 階までの微分，r 階までの多項式との積がすべて 2 乗可積分の関数全体

$W_0^s(\mathbb{R}^n) = H^s(\mathbb{R}^n)$ とする．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \bigcap_m W_m^m(\mathbb{R}^n)$ を $\mathbb{R}^n$ 上の**急減少関数族**と呼ぶ．

(1) $\mathcal{F}L_2(\mathbb{R}^n) = L_2(\mathbb{R}^n)$ であり，$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$ が成立する．これは $\mathcal{F}, \bar{\mathcal{F}}$ が等長変換ということであり，**パーセバル (Parseval) の等式**と呼ばれている．

(2) $\mathcal{F}W_r^s(\mathbb{R}^n) = W_s^r(\mathbb{R}^n)$ であり，r, s が入れ替わる．とくに急減少関数のフーリエ変換は急減少関数．さらに $\forall\alpha$ に対して次が成立する：

$$\mathcal{F}(D_x^\alpha f) = \xi^\alpha \mathcal{F}(f), \quad \mathcal{F}((ix)^\alpha f) = \partial_\xi^\alpha \mathcal{F}(f).$$

(3) L_2-内積に関する $W_r^s(\mathbb{R}^n)$ の双対空間を $W_{-r}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ とすると，$\mathcal{F}$ は $\bar{\mathcal{F}}$ の双対写像として $W_{-r}^{-s}(\mathbb{R}^n)$ に拡張される．これを**超関数のフーリエ変換**と呼ぶ．

(4) $\prod_{i=1}^n (1+x_i^2)^{-1} \in L_1(\mathbb{R}^n)$．これを利用すると，$W_{2n}^0(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$ で埋め込み写像は連続．

(5) $H^{p+[n/2]+1}(\mathbb{R}^n) \subset B^p(\mathbb{R}^n)$ で埋め込み写像は連続．ただし，$B^p(\mathbb{R}^n)$ は p 階までの微分がすべて有界で連続となる関数の全体である．

(6) 定数 1 を関数と見て $1(x)$ と書けば $\mathcal{F}(1(x)) = \delta(\xi)$ [3]．

(7) $f(\boldsymbol{x})$ が次の性質 $(*)$ を持てば $\mathcal{F}f$ は $\mathbb{C}^n$ 上の整関数となる．$b(0 < b < 1)$, および $B > 0$ があって，$(*)$ $\forall\alpha$ に対して $|\boldsymbol{x}^\alpha f(\boldsymbol{x})| \le C|\alpha|^{b|\alpha|}B^{|\alpha|}$.

3) 伝統的書き方と定数倍の違いがあるので要注意．

真空のフーリエ変換

ここで，ワイル表示の真空 $\varpi_{00}=2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}$ のフーリエ逆像を計算しておこう．

$$\iint 2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}e^{-isu-itv}\,đu\,đv=\iint 2e^{\frac{2i}{\hbar}(uv-\frac{\hbar}{2}(su+tv))}đu\,đv,$$

$$\frac{2i}{\hbar}(uv-\frac{\hbar}{2}(su+tv))=\frac{2i}{\hbar}(u-\frac{\hbar t}{2})(v-\frac{\hbar s}{2})-\frac{\hbar i}{2}st.$$

だから，積分変数を変換して

$$\bar{\mathcal{F}}(\varpi_{00})=2e^{-\frac{\hbar i}{2}st}\iint e^{\frac{2i}{\hbar}u'v'}đu'đv'.$$

$\int e^{\frac{2i}{\hbar}u'v'}đu'=\delta(\frac{2}{\hbar}v')$ だから，これを積分して，フーリエ逆像は $\hbar e^{-\frac{\hbar i}{2}st}$ となる．したがって

$$\varpi_{00}=\iint \hbar e^{-\frac{\hbar i}{2}st}e^{isu+itv}đs\,đt \tag{6.26}$$

となる．$e^{itv}*e^{isu}=e^{-\frac{\hbar i}{2}st}e^{isu+itv}$ だから

$$\varpi_{00}=\int e^{itv}đt*\int e^{isu}đs=\hbar\delta(v)*\delta(u) \tag{6.27}$$

のように書いてもよいだろう．

> この公式の意味を深刻に受け止めてほしい．われわれが「真空」と呼んでいるものは古典的には相空間の点と思っていたものであるといえないであろうか？　そうとすると，考え方をかなり変更しなくてはならなくなる．真空という概念も古典的なものではないのだろうか？

6.3.2　ゲルファント (Gel'fand) の S^b_a-型関数

これまでは u,v は複素変数として実数をまったく意識しないで扱われてきたのだが，この項では関数族を実数を重要視した重み付きの位相で縛ることを考える．その最も典型的なのが **S-型関数**と呼ばれている関数族，つまり $\mathcal{E}_p(\mathbb{C}^2)$ に属する関数であり，変数を実数に束縛したときに急減少関数となるような関数族の部分族である．$\mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$ を $\mathbb{R}^2$ 上の急減少関数全体とする．この節でこれの部分族を扱う．

この項はほとんど全部ゲルファント－シーロフ (Gel'fand-Shilov)[10] の教科書に従っているが，細かいところの定義の仕方とか記号は都合がいいように変えてある．まず，次のように定義する．

$0 < a, b < 1$ と $A, B > 0$ に対して $\mathbb{C}^2$ 上の正則関数 $f(x, y)$ が **$S^{b,B}_{a,A}$-型の関数**であるとは，f が任意の自然数の組 $k = (k_1, k_2), \ell = (\ell_1, \ell_2)$ に対し実軸上で次の不等式を満たす場合をいう：

$$|x^{k_1} y^{k_2} (\partial_x^{\ell_1} \partial_y^{\ell_2} f)(x, y)| \leq C A^{|k|} B^{|\ell|} |k|^{a|k|} |\ell|^{b|\ell|}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{6.28}$$

ただし $|k| = k_1 + k_2, |\ell| = \ell_1 + \ell_2$ であり，$0^0 = 1$ とする．a, b, A, B は決まっているので，C だけが f に依存する定数である．不等式の条件は実軸上でのみ課せられているのに，$\mathbb{C}^2$ 上の正則関数であることが要求されているのは不自然に見えるかもしれないが，実は実軸上で上の不等式を満たす関数は整関数なのである．それは，不等式 (6.28) より

$$|(\partial_x^{\ell_1} \partial_y^{\ell_2} f)(0, 0)| \leq C_0 B^{|\ell|} |\ell|^{b|\ell|}$$

であるから，これに前章の補題 5.1 の不等式 (5.4) をあてはめて ℓ_1, ℓ_2 を分離しておいて，f を原点でテイラー展開し収束半径を見ると，$b < 1$ より収束半径が各変数について ∞ であることがわかるからである．また，(6.28) 式の右辺は x, y によらないから，$S^{b,B}_{a,A}$-型の関数はすべての微分が任意の多項式をかけても有界である．したがって f を $\mathbb{R}^2$ に制限したものは急減少関数である．

$S^{b,B}_{a,A}(\mathbb{C}^2)$ を $S^{b,B}_{a,A}$-型の関数全体のなす空間とする．これは可算個のセミノルム系で定義されるフレシェ空間である．

$S^{b,B}_{a,A}(\mathbb{C}^2)$ は式 (5.18) で使われている行列 A が $SL_{\mathbb{R}}(2)$ に制限されているときのみこういう自己同型で不変である．大まかにいえば，われわれは $SL_{\mathbb{C}}(2)$-対称性をあきらめて，$SL_{\mathbb{R}}(2)$-対称性を持つ空間にして，もっといろいろな関数を含ませようとするわけである．$A \leq A', B \leq B'$ のとき包含関係 $S^{b,B}_{a,A}(\mathbb{C}^2) \subset S^{b,B'}_{a,A'}(\mathbb{C}^2)$ は自明であろう．次のように空間を定義する：

$$S^{b,B+}_{a,A+}(\mathbb{C}^2) = \bigcap_{\varepsilon > 0} S^{b,B+\varepsilon}_{a,A+\varepsilon}(\mathbb{C}^2), \quad S^b_a(\mathbb{C}^2) = \bigcup_{A,B>0} S^{b,B}_{a,A}(\mathbb{C}^2).$$

$S^{b,B+}_{a,A+}(\mathbb{C}^2)$ には射影極限位相を，$S^b_a(\mathbb{C}^2)$ には帰納極限位相を入れるが，こちらはほとんど使わない．また $T^b_a(\mathbb{C}^2) = \bigcap_{A,B>0} S^{b,B}_{a,A}(\mathbb{C}^2)$ とおき射影極限位相を入れる．次のような空間も定義しておくと便利である：

$$T^{b+}_{a+}(\mathbb{C}^2) = \bigcap_{\varepsilon > 0} T^{b+\varepsilon}_{a+\varepsilon}(\mathbb{C}^2).$$

$S_{a,A+}^{b,B+}(\mathbb{C}^2)$, $T_a^b(\mathbb{C}^2)$ は加算個のセミノルム系で定義されたフレシェ空間である．お互いの関係は次のようなものである：

$$T_a^b(\mathbb{C}^2) \subset S_{a,A}^{b,B}(\mathbb{C}^2) \subset S_{a,A+}^{b,B+}(\mathbb{C}^2) \subset S_a^b(\mathbb{C}^2) \subset T_{a+}^{b+}(\mathbb{C}^2).$$

このように関数空間をたくさん用意しなければならないのは，この辺が数学的にあまり整理されていないからである．

証明はしないが，次のことがわかっている．

命題 6.3　$a+b<1$ のとき，$S_a^b(\mathbb{C}^2)=\{0\}$ である．
$0<a,b<1$, $a+b\geq 1$ とすると $S_a^b(\mathbb{C}^2) \subset \mathcal{E}_{\frac{1}{1-b}+}(\mathbb{C}^2)$ である．

教科書 [10] p.205 に書いてあることだが，フーリエ変換では微分と多項式の積が入れ替わるので次の補題は自然であろう．

補題 6.2　$0<a,b<1$, $a+b>1$ のとき，$\mathcal{F}S_{a,A+}^{b,B+}(\mathbb{C}^2)=S_{b,B+}^{a,A+}(\mathbb{C}^2)$ が成立する．

上の補題を示すには次のことがわかれば十分であろう．

補題 6.3　$0<a,b<1$, $a+b>1$ のとき $\forall f \in S_{a,A}^{b,B}(\mathbb{C}^2)$ に対して，

$$|(\partial_x^{\ell_1}\partial_y^{\ell_2}x^{k_1}y^{k_2}f)(x,y)| \leq C(A+\varepsilon)^{|k|}(B+\varepsilon)^{|\ell|}|k|^{a|k|}|\ell|^{b|\ell|}, \quad (x,y)\in\mathbb{R}^2$$

という不等式が $\forall\varepsilon>0$ で成立する．

6.3.3　$*$-積代数の拡張

対称性を遠慮したおかげで，命題 6.3 より次の定理が得られる（[31]p.194 参照）．

定理 6.3　$0<a,b<1$, $a+b\geq 1$ ならば，$T_a^b(\mathbb{C}^2)$ および $S_a^b(\mathbb{C}^2)$ はどの積公式を使っても $*$-積で閉じる．とくに $T_a^b(\mathbb{C}^2)$ は位相結合代数となる．

$\mu=\hbar i$ を $i\mathbb{R}$ の座標関数とし，$C^\omega(i\mathbb{R}, T_a^b(\mathbb{C}^2))$ を $i\mathbb{R}$ から $T_a^b(\mathbb{C}^2)$ への実解析的写像の全体に各点ごとに $*$-積を入れたものとすれば，これは自然に解析的 μ-制御代数になる．

$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ は $*$-積で閉じていない空間だが，$e^{-(x^2+y^2)}$ のような関数は変数を実数に制限すれば急減少関数である．実は次がわかる．

命題 6.4　真空 ϖ_{00}，および多項式空間 $\mathbb{C}[u,v]$ を含む σ-フレシェ（結合）代数がワイル代数の拡張として存在する．

証明　生成元 u,v を $u=\frac{1}{\sqrt{2}}(x+iy), v=\frac{1}{\sqrt{2}}(ix+y)$ の関係で x,y に替えるとワイル順序表示では $\varpi_{00}=2e^{\frac{2i}{\hbar}uv}=2e^{-\frac{1}{\hbar}(x^2+y^2)}$ だから，x,y を実数に制限すると急減少関数となる．補題 6.3 より，任意の多項式 $p(x,y)$ に対して $p(x,y)\varpi_{00}\in S^{1/2}_{1/2}(\mathbb{C}^2)\subset T^{1/2+\varepsilon}_{1/2+\varepsilon}(\mathbb{C}^2)$ としてよい．

一方，定理 6.3 より $T^{1/2+\varepsilon}_{1/2+\varepsilon}(\mathbb{C}^2), 0<\varepsilon<1/2$ は σ-フレシェ代数となる．この代数は x,y を生成元にしてつくられてはいるが，命題 5.1 により u,v に変換できる．　（証明終わり）

$T^{1/2+\varepsilon}_{1/2+\varepsilon}(\mathbb{C}^2), 0<\varepsilon<1/2$ は ϖ_{00} の他にも $e^{-tiuv}, t>0$, および $\mathcal{E}_1(u,v)$ を含むことがわかる．

問題は ΨDO-積公式とモイヤル積公式とで積の計算できる範囲が違っているということである．

6.4　$*$-積の積分表示

これまでの $*$-積では u,v は複素変数として扱われていたが，この節では変数 u,v を実数に制限し，正規順序表示，ワイル順序表示それぞれに応じて**振動積分**と呼ばれる計算法で $*$-積の定義される範囲を拡張する．これはテイラー展開，逐次部分積分を混ぜて，ある約束事を設けて行なう計算法である．

6.4.1　ヘルマンダー (Hörmander) 型の振動積分

$f_\circ(x,y), g_\circ(x,y)$ が x をパラメーターとするフーリエ変換を使って

$$f_\circ(x,y)=\int\hat{f}(x,t)e^{ity}\,dt,\quad g_\circ(x,y)=\int\hat{g}(x,t)e^{ity}\,dt \tag{6.29}$$

と与えられているときには，ΨDO-積公式で

$$f_\circ(x,y)*g_\circ(x,y)=\iint\hat{f}(x,t)e^{ity}*\hat{g}(x,s)e^{isy}\,dt\,ds$$

だが，正規順序表示で $e^{ity} * h(x) * e^{-ity} = h(x - \hbar t)$ が成立することより

$$f_\circ(x,y) * g_\circ(x,y) = \iint \hat{f}(x,t)\hat{g}(x-\hbar t, s)e^{ity} * e^{isy} \,dt\,ds$$

であり，$e^{ity} * e^{isy} = e^{i(s+t)y} = e^{isy} * e^{ity}$ に注意し s で積分してしまえば

$$\begin{aligned} f_\circ(x,y) * g_\circ(x,y) &= \int \hat{f}(x,t)g(x-\hbar t, y)e^{ity} \,dt \\ &= \iint f_\circ(x,y')g_\circ(x-\hbar t, y)e^{it(y-y')} \,dy'\,dt. \end{aligned}$$

$y - y' \to -y$, $\hbar t \to -t$, $y \to \hbar s$ と変数変換を繰り返すと

$$f_\circ(x,y) * g_\circ(x,y) = \iint f_\circ(x, y+\hbar s)g_\circ(x+t, y)e^{its} \,dt\,ds \tag{6.30}$$

となる．ここでは x と y が平等に扱われてはいないが，t, s が実数に制限されているので e^{its} の項は微分を繰り返しても多項式程度のものが付くだけのおとなしい項となり，評価式の中ではほとんど無視できる項となるので積分には意味が付けやすい．この形から $f_\circ, g_\circ \in L_1(\mathbb{R}^2)$ ならば右辺の積分に意味があることがわかる．

振動積分の計算法

(6.30) 式と形は同じだが

$$f_\circ * g_\circ(x,y) = os\text{-}\iint_{\mathbb{R}^2} f_\circ(x,\, y+\hbar s)g_\circ(x+t,\, y)e^{its} \,dt\,ds \tag{6.31}$$

と書かれる積を定義する．$os\text{-}\iint$ は**振動積分**と呼ばれるもので，上の積分はそのままでは定義できない場合でも，テイラー展開，逐次部分積分を通じて計算するものである．

$f_\circ(x, y+\hbar s)$ をテイラー展開して $\tilde{f}_m$ を剰余項（煩わしいので ◦ をつけない）とすると，

$$f_\circ(x, y+\hbar s) = \sum_{\alpha}^{m} \frac{(\hbar s)^\alpha}{\alpha!}(\partial_y^\alpha f_\circ)(x,y) + \tilde{f}_m(x,y,\hbar s)(\hbar s)^m.$$

$g_\circ(\cdot, y)$ が第 1 変数に関して台がコンパクトとなっている場合には部分積分で

$$\int \hbar^\alpha s^\alpha g_\circ(x+t,y)e^{its} \,dt\,ds = \hbar^\alpha(i\partial_x)^\alpha g_\circ(x+t,y)e^{its} \,dt\,ds = \hbar^\alpha(i\partial_x)^\alpha g_\circ(x,y)$$

となるが，この計算は $g_\circ(\cdot,y)$ を超関数として扱うときにはいつでも許されるから，os-$\iint$ では次のように計算する：

$$
\begin{aligned}
&f_\circ * g_\circ(x,y)\\
&=\sum_{\alpha}^{m}\frac{(\hbar i)^\alpha}{\alpha!}\partial_y^\alpha f_\circ(x,y)\partial_x^\alpha g_\circ(x,y)+\iint_{\mathbb{R}^2} f_m(x,\,y,\,\hbar s)g_\circ(x+t,\,y)e^{its}\,dt\,ds
\end{aligned}
\tag{6.32}
$$

始めの項は ΨDO-積公式であり，$f_\circ, g_\circ$ が C^∞-級でありさえすれば計算できる．剰余項のほうは $f_m(x,\,y,\,\hbar s)$ が（m 階微分されているおかげで）s について L_1（可積分）になってくれればよい．つまり **y について微分すればするほど質（たち）のよくなる（積分しやすくなる）関数族**（**表象族**という）をうまく設定すれば $*$-積が定義される．結合律は直接計算で確かめられる．

> 滑らかさという観点からだと，微分すればするほど質が悪くなるというのが普通の感覚である．だから微分すればするほど質の良くなる関数族というのはちょっとした発想の逆転なのである．

上の計算では x, y などは 1 変数の座標関数として扱われているが，定義や計算を見れば $x=(x^1,\cdots,x^n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ として多重添字で読み直せば多変数の場合にそのまま通用することがわかるであろう．

表象族（ヘルマンダー型）

上の条件を満たす表象族を 1 つ与えよう．$\mathbb{R}^{2n}$ を $N=\mathbb{R}^n$ の余接束 T_N^* と見る．そして点 $x\in N$ のファイバー $T_x^*N=\mathbb{R}^n$ の単位球面を S_x^*N と書く．$T_N^*-\{0-\text{切断}\}$ の点 $(x;y)$ は $r=|y|$, $z\in S_x^*N$ として $(x;rz)$ のように表示できる．$r=0$ の周りで $\phi(r)=0$, $r>1/2$ で $\phi(r)=1$ となる切り落し (cut-off) 関数を $\phi(r)$ とする（8.1.2 項も参照）．

T_N^* 上の C^∞-関数 $f(x;y)$ が**漸近次数** $\le m$ であるとは任意の整数 $s\ge -m$ に対して S_N^* 上の C^∞-関数 $a_m, a_{m-1},\ldots,a_{-s}$ を選んで T_N^* 上で次の不等式が成立する場合をいう（おもに $m\le 0$ の場合を想定している）：

$$
r^{s+1}\Big|f(x;rz)-a_m(x;z)\phi r^m-a_{m-1}(x;z)\phi r^{m-1}-\cdots-a_{-s}\phi r^{-s}\Big|\le C_s\ (\text{有界})
$$

ただし $r^{-\alpha}$ は普通の可換積 $\cdot$ による逆元である．

f が漸近次数 $\leq m$ の関数であることを次のように書く：

$$f(x;rz) \sim a_m(x;z)r^m + a_{m-1}(x;z)r^{m-1} + \cdots + a_{-s}r^{-s} + \ldots, \tag{6.33}$$

これを f の**漸近展開**という．$m \leq 0$ ならば，これは $r = \infty$ でのテイラー展開と考えてよい．

$\Sigma^m(T^*_N)$ を漸近次数が $\leq m$ である T^*_N 上の関数全体とする．$\Sigma^\infty(T^*_N) = \bigcup \Sigma^m(T^*_N)$ を**古典的表象族**と呼ぶ．$\Sigma^{-\infty}(T^*_N) = \bigcap \Sigma^m(T^*_N)$ とおく．

$\Sigma^m(T^*_x)$ は $q \in N$ を止めて y についてだけ上のような漸近展開を持つ関数全体とし，ベクトル束 $\coprod_{x\in N} \Sigma^m(T^*_x)$ を考えればこれの C^∞-切断の全体が $\Sigma^m(T^*_N)$ であるといってもよい．$r^{-1} = |y|^{-1}$ は y について微分すればするほど質がよくなる関数（遠方で速く減少するようになる関数）だから，$\Sigma^m(T^*_N)$ に属する関数はみなその性質を持つ．

定理 6.4　$\Sigma^\infty(T^*_N)$ は ΨDO-型の振動積分 (6.32) 式で定義された $*$-積で結合代数となる．とくに

$$\Sigma^k(T^*_N) * \Sigma^\ell(T^*_N) \subset \Sigma^{k+\ell}(T^*_N), \quad [\Sigma^k(T^*_N), \Sigma^\ell(T^*_N)] \subset \Sigma^{k+\ell-1}(T^*_N)$$

が成立する．$\Sigma^1(T^*_N)$ は交換子積に関してリー環をなしている．

$\Sigma^0(T^*_N)$ へは次のような位相を入れる．$\forall m \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\Sigma^0(T^*_N) = \bigoplus_{k=0}^{m} C^\infty(S^*_N)\phi(r)r^{-k} \oplus \Sigma^{-(m+1)}(T^*_N)$$

のように直和分解ができることを使って，それぞれの空間に C^∞-位相を入れ，その直積位相 T_m を上の空間に入れる．しかし，いまの場合 $S^*_N = \mathbb{R}^n \times S^*_x N$（非コンパクト）なので C^∞-位相の定義のされ方に少し注意する必要がある．そうしておいて射影極限位相 $\varprojlim T_m$ を $\Sigma^0(T^*_N)$ に入れる．$\Sigma^0(T^*_N)$ は完備位相線形空間で $\Sigma^{-\ell}(T^*_N)$ を閉部分空間として含む．$\mu = i\sqrt{1+r^2}^{-1}$ とする．$r^{-2} = -\mu^2(1 - \mu^2 + \mu^4 - \cdots)$ だから r^{-m} で漸近展開しているところは μ での形式的展開に置き換えられるし μ^{-1} も考えられる．また i をつけているのは $[x,y] = \mu$ として $\bar{x} = x, \bar{y} = y$ とし，$\overline{a * b} = \bar{b} * \bar{a}$ を要求すると，$\bar{\mu} = -\mu$ としなければならなくなるからである．（複素共役を反自己同型であるとするのは線形代数で双対写像が反自己同型なのと調子を合わせるため．）

系 6.1　$(\Sigma^0(T^*_N); *)$ は 4.3 節の μ-制御代数となる．さらに $\frac{1}{\mu}\Sigma^0(T^*_N)$ は $*$-積の交換子積に関してリー代数となる．

6.4.2 ワイル型の振動積分

上と同じことはワイル順序表示でもできる．天下りだが $*$-積を振動積分で

$$
f*g(x,y) = \\
os\text{-}\iint_{\mathbb{R}^4} f\Big(x+\frac{\hbar}{2}s,\ y+\frac{\hbar}{2}t\Big)g(x+s',\ y+t')e^{i(ts'-st')}\bar{d}s\bar{d}t\bar{d}s'\bar{d}t' \tag{6.34}
$$

と定義しよう．これは計算法の約束をとりつけるだけだが，前節では f を y についてだけテイラー展開していたところを，x,y を平等に扱って，s,t について $f(x+\frac{\hbar}{2}s,\ y+\frac{\hbar}{2}t)$ を k 次までテイラー展開をする：

$$
\begin{aligned}
&f\Big(x+\frac{\hbar}{2}s,\ y+\frac{\hbar}{2}t\Big)\\
&\quad=\sum_{i+j<k}\frac{1}{i!j!}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{i+j}\partial_x^i\partial_y^j f(x,y)(\hbar s)^i(\hbar t)^j+\hbar^k\sum_{i+j=k}s^it^j\tilde{f}_{ij}(x,y,s,t).
\end{aligned}
$$

$\tilde{f}_{ij}$ は剰余項である．前と同様，超関数の計算公式では部分積分で

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{2^{m+n}}s^mt^ne^{i(ts'-st')}\bar{d}s\bar{d}t &= \Big(\frac{1}{2}\Big)^{m+n}(-i\partial_{s'})^n(i\partial_{t'})^m\int e^{i(ts'-st')}dsdt\\
&=\Big(\frac{i}{2}\Big)^{m+n}(-\partial_{s'})^n(\partial_{t'})^m\delta(s',-t')
\end{aligned}
$$

だから，

$$
\begin{aligned}
os\text{-}&\iint\Big(\frac{1}{2}\Big)^{p+q}s^pt^qg(x,y,s',t')e^{i(ts'-st')}dsdt\bar{d}s'\bar{d}t'\\
&=\int g(x,y,s',t')\Big(\frac{i}{2}\Big)^{p+q}(-\partial_{s'})^q(\partial_{t'})^p\delta(s',-t')\bar{d}s'\bar{d}t'
\end{aligned}
$$

とし，部分積分で s^it^j の部分を $(i\partial_{s'})^j(-i\partial_{t'})^ig(x+s',\ y+t')$ に置き換えて

$$
\begin{aligned}
os\text{-}&\iint s^pt^qg(x,y,s',t')e^{i(ts'-st')}\bar{d}s\bar{d}t\bar{d}s'\bar{d}t'\\
&=\Big(\frac{i}{2}\Big)^{p+q}(\partial_{s'})^q(-\partial_{t'})^pg(x,y,0,0)
\end{aligned}
$$

と計算する．このような超関数の計算を組み込むと，結果として

$$
\begin{aligned}
f*g(x,y) &= \sum_{p+q<k}\frac{1}{p!q!}\Big(\frac{\hbar i}{2}\Big)^{p+q}\partial_x^p\partial_y^qf(x,y)\partial_x^q(-\partial_y)^pg(x,y)\\
&\quad+\Big(\frac{i\hbar}{2}\Big)^k\sum_{i+j=k}\int\tilde{f}_{ij}(x,y,s,t)(\partial_{s'})^q(-\partial_{t'})^pg(x+s',y+t')\\
&\qquad\times e^{i(st'-ts')}\bar{d}s\bar{d}t\bar{d}s'\bar{d}t'
\end{aligned}
$$

のようになる．剰余項にあたるところは何回か微分されてしまうので，微分すればするほど質のよくなる（積分しやすくなる）ような関数空間を設定すればこれで計算ができる．剰余項以外のところはモイヤル積公式 (5.17) そのものである．結合律は (6.34) 式を直接計算してわかる．

上の計算では x, y などは 1 変数の座標関数として扱われているが，定義や計算を見れば $x=(x^1,\cdots,x^n)$, $y=(y_1,\cdots,y_n)$ として多重添字で読み直せば多変数の場合にそのまま通用することがわかるであろう．

表象族（ワイル型）

$\mathbb{R}^{2n}$ でも階数 (order) の概念を変え表象族をうまく設定すると話が進む．$q^1,\ldots,q^n$ は $\mathbb{R}^n$ 上の通常の線形座標系，$p_1,\ldots,p_n$ はその双対座標系とする．これまでと違って $\rho=\sqrt{\sum((q^i)^2+(p_i)^2)}$ とおく．これは階数を勘定するとき q^i も 1 階と勘定することとしたということである．

$$(q,p)=\rho\omega, \quad \omega\in S^{2n-1}(1)$$

と考える．ただし，$S^{2n-1}(1)$ は $\mathbb{R}^{2n}$ の単位球面である．

$\forall m\in\mathbb{Z}$ に対して，$\mathbb{R}^{2n}$ 上の C^∞-関数からなる族 $\tilde{\Sigma}^m(\mathbb{R}^{2n})$ を定義しよう．これは漸近次数 m の**古典的表象族**，あるいは**ワイル型表象族**と呼ばれる．

$t=0$ の近傍で $\phi(t)=0$, $t>1/2$ で $\phi(t)=1$ となる cut-off 関数を $\phi(t)$ とする．f が $\tilde{\Sigma}^m(\mathbb{R}^{2n})$ の元であるというのは任意の自然数 $k>-m$ に対して，$S^{2n-1}(1)$ 上の C^∞-関数列 $f_m, f_{m-1},\cdots,f_{-k}$ で

$$f-\phi(\rho)(f_m\rho^m-f_{m-1}\rho^{m-1}-\cdots-f_k\rho^{-k})$$

が $\mathbb{R}^{2n}$ 上 C^∞ かつ有界となる場合をいう．ただし $\rho^{-\alpha}$ は普通の可換積 $\cdot$ による逆元である．このことを次の記号で表す：

$$f\sim f_m\rho^m+f_{m-1}\rho^{m-1}+\cdots+f_k\rho^{-k}+\cdots, \quad f_i\in C^\infty(S^{2n-1}(1)).$$

右側は f の**漸近展開**と呼ばれる．次のようにおく：

$$\tilde{\Sigma}^{-\infty}(\mathbb{R}^{2n})=\bigcap_m\Sigma^{-m}(\mathbb{R}^{2n}), \quad \tilde{\Sigma}^{\infty}(\mathbb{R}^{2n})=\bigcup_m\Sigma^{m}(\mathbb{R}^{2n}).$$

$\tilde{\Sigma}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ の元は q,p について微分すればするほど質がよくなる関数（遠方で速く減少するようになる関数）となる．

$\tilde{\Sigma}^0(\mathbb{R}^{2n})$ への位相は次のように与えられる．$\forall m \in \mathbb{N}_0$ に対して

$$\tilde{\Sigma}^0(\mathbb{R}^{2n}) = \bigoplus_{k=0}^{m} C^\infty(S^{2n-1})\phi(\rho)\rho^{-k} \oplus \tilde{\Sigma}^{-(m+1)}(\mathbb{R}^{2n})$$

のように直和分解ができることを使って，それぞれの空間に一様 C^∞-位相を入れ，その直積位相 T_m を上の空間に入れる．そうしておいて射影極限位相 $\varprojlim T_m$ を $\Sigma^0(\mathbb{R}^{2n})$ に入れる．$\tilde{\Sigma}^0(\mathbb{R}^{2n})$ は σ-フレシェ空間で $\tilde{\Sigma}^{-\ell}(\mathbb{R}^{2n})$ を閉部分空間として含む．

定理 6.5　$\tilde{\Sigma}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ は振動積分 (6.34) で定義する $*$-積に関して結合代数であり，次が成立する：

$$\tilde{\Sigma}^k(\mathbb{R}^{2n}) * \tilde{\Sigma}^l(\mathbb{R}^{2n}) \subset \tilde{\Sigma}^{k+l}(\mathbb{R}^{2n}),\ \ [\tilde{\Sigma}^k(\mathbb{R}^{2n}), \tilde{\Sigma}^l(\mathbb{R}^{2n})] \subset \tilde{\Sigma}^{k+l-2}(\mathbb{R}^{2n}).$$

とくに $\tilde{\Sigma}^2(\mathbb{R}^{2n})$ は交換子積に関してリー環である．詳しく見ると次がわかる．

系 6.2　$\mu = i(1+\rho^2)^{-1/2}$ とすると $\tilde{\Sigma}^0_{ev}(\mathbb{R}^{2n})$ は 4.3 節の μ-制御代数となる．B としては $C^\infty(S^{2n-1}(1))$ をとることができる．

とくに，次のことには注意する．上の振動積分による $*$-積は $\forall f, g \in \tilde{\Sigma}^\infty(\mathbb{R}^{2n})$，$\forall \hbar \geq 0$ について定義されている．

さらに $\frac{1}{\mu}\tilde{\Sigma}^0_{ev}(\mathbb{R}^{2n})$ はポアソン括弧積に関してリー代数となり，$\forall f \in \Sigma^0_{ev}(\mathbb{R}^{2n})$ の漸近展開の初項 f_0 が実数値関数ならハミルトン・ベクトル場 $X_{\frac{1}{\mu}f}$ は，球面 S^{2n-1}（これは無限遠方の球面とみなされている）上の C^∞-接ベクトル場となる．S^{2n-1} はコンパクト集合だから，結果として $X_{\frac{1}{\mu}f}$ はすべて完備ベクトル場である．

$\tilde{\Sigma}^0_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$ を $\tilde{\Sigma}^0(\mathbb{R}^{2n})$ の元で漸近展開の初項 f_0 の実数値関数であるものの全体とする．このとき次のことがわかっている．

定理 6.6　([19]) $\forall f \in \tilde{\Sigma}^0_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$ に対して $\exp_*(\frac{1}{\mu}f)$ が定義できる．しかもこれらは $*$-積で閉じて群を生成する．これは $\frac{1}{\mu}\tilde{\Sigma}^0_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^{2n})$ をリー環とする（無限次元の）リー群と理解できる．

6.4.3　$\mathcal{O}_\infty$ の取り扱い

積公式 (6.32), (6.34) は f, g の台がまったく離れていても $*$-積は 0 にはならないことを述べてもいる．これに対し (5.15), (5.17) とか後の方での漸近展開を計

算する公式 (8.14), (8.15) では積の漸近展開は 0 となる．つまり，**積分で定義された $*$-積の積公式に局所性はないのである．**（というか，このようなところを扱うときに，局所性を頼りにするような考え方をしていてはいけないように思われる.）

形式的 μ-制御代数を考えようとしているときには $\mathcal{O}_\infty = \bigcap_k \mu^k * \mathcal{O}$ はじゃま物だったのだが，$\forall f \in \mathcal{O}$ に対して $[\frac{1}{\mu}f, \mathcal{O}_\infty] \subset \mathcal{O}_\infty$ であるから，代数 $(\mathcal{O}_\infty; *)$ は古典的点描像に無関係とはいえこれは大切な情報を持っている．行列表現では $\mathcal{O}_\infty$ の部分は有限階数の行列に相当する部分であるから微分幾何的にはほとんど意味のない部分と解釈されるのだが，この部分が固有値のようなものには大きく影響するから量子論的にはまったく無視できない項なのである．変数を実数に制限したので結合律を保ちながら $*$-積が計算できる範囲は広くなったのだが，その影響で今度は $\mathcal{O}_\infty$ というものが現れる．これは困ったものではなく，相互作用をかきこむための余地のようなものである．おそらく，$\mathcal{O}_\infty = 0$ となる準解析的 μ-制御代数はまだ古典が幅を利かせているのだが，$\mathcal{O}_\infty \neq 0$ となると量子論的微細構造が物をいい始めるのである．

$\mathcal{O}_\mathbb{R}$ を漸近展開の初項が純虚数値関数であるような $\mathcal{O}$ の元全体とすると定理 6.6 により $\mathcal{O}_\mathbb{R}$ をリー環として持つリー群のようなものがあると思ってよいであろう．この群を $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ とする．$\mathrm{Ad}(\exp_*(\frac{1}{\mu}f)) = \exp \mathrm{ad}(\frac{1}{\mu}f)$ は代数 $\mathcal{O}_\infty$ の自己同型になっているから $\mathfrak{G}(\mathcal{O})$ は自己同型群として $\mathcal{O}_\infty$ に作用するのである．

q-number functions

4.2.3 項で $Diff(N)$ を相空間上の関数環のように思うことにしたのだが，この場合は関数環といっても多項式環程度のものであって，古典力学のように自由に指数関数をつくったり，定義域を制限したりできない．当然，もっと広いものが考えられるようにしないと古典力学との関係が見えてこない．物理でいわれる q-number function というのはそういう概念の 1 つで，これの数学的にはっきりした定義はないのだが，どれかの順序表示によって表示できる拡張されたワイル代数の元と考えてよい．

この本ではワイル代数の元の表示の方法としては，正規順序，反正規順序，ワイル順序表示しか考えていないが，代数の元を一意的に書き位相などを定義しやすくし，代数を拡張するのが目的だから，もっとさまざまなものが考えられる．要するに，多項式の空間に積公式で積を定義するやり方で，ワイル代数と同型のものをつくればよいのであるが，実際の計算をするためには相互変換まで計算できるものでないと困る．

q-number function という概念はその要求に応えているのだが，しかし，これを扱うと奇妙なものがたくさん見えてくるのである．その最たるものは，ある q-number function に相互変換を次々に行ない，どこかを 1 周してもとの表示に戻ってきたときに，(表示方法はもとに戻っているのに) 同じ表示に戻らないという現象である．このことはこの章で扱った相互変換に $\pm$ の不定性が付いていることからも推察できる．

この現象は，例えば $\sqrt{-1}$ のようなものを考えるときにこれを $+i$ と考えても $-i$ と考えてもよいといった現象で，適切にリーマン面をつくってその上で考えるのがこれまでの数学の常識なのであるが，つくるべきリーマン面が元ごとに違うにもかかわらず，積は自由に考えたいので，リーマン面を固定して考えることが許されないので，いまのところ素直に「多価の元」と考えてしまって計算法の工夫で欠点を補う方向で考えている．

第 7 章　時間発展の方程式

因果法則は時間発展の微分方程式で与えられることが多い．これを解こうとすると指数関数が重要になってくる．（しかし，同時にパラメーター t の相対論化も問題になる．2 重周期の指数関数はあるのだろうか？）

前章で述べた奇妙に見える元はみな $*$-指数関数に関係している．これまでは結合代数になるということを最優先して考えてきたのだが，計算公式を優先させて考え始めると，結合代数という枠から自然に出てしまうのである．

μ-制御代数 $\mathcal{O}$ は μ^{-1} を添加して $\mathcal{O}[\mu^{-1}]$ をつくってもまだ $*$-積で閉じているが，$\exp\mathcal{O}[\mu^{-1}]$ まで含む結合代数は考えにくい．しかし，$\frac{1}{\mu}\mathcal{O}$ は交換子積でリー代数になっているから，リー代数というものがいわばリー群の第 1 次近似として得られる概念だったことを思い出せば $\exp(\frac{1}{\mu}\mathcal{O})$ のようなものはリー群として考えられてよいであろう．この章で，結合代数の考え方から，リー群の考え方に移行する．

量子化の処方箋はシュレーディンガーであれ，ハイゼンベルグであれ古典論で $\frac{\partial}{\partial t}f=\{H,f\}$ と書かれているところを $\frac{\partial}{\partial t}f=[\frac{1}{\mu}H,f]_*$ のように見直すものであった．この場合 H の形は変わらずただ代数が変わり，式の計算のしかたが変わっているのである．仮にこの処方箋が正しいものだとすると，われわれが知らなければならないのは古典論での H とそれから $[\frac{1}{\mu}H,f]_*$ を計算するための結合代数の定義や計算法，および方程式 $\frac{\partial}{\partial t}f=[\frac{1}{\mu}H,f]_*$ の解法といったものになる．解法といったが，この式の解は $*$-積の指数関数 $e_*^{\frac{t}{\mu}H}$ を使えば $e_*^{\frac{t}{\mu}H}*f*e_*^{-\frac{t}{\mu}H}$ で

与えられるのだから，指数関数が考えられるようにすればよいのである．

7.1　2次式の指数関数

指数関数 e_*^{au+bv} は前章で定義してあるから，今度は $e_*^{t(au^2+bv^2+2cu*v)}$ を定義しよう．これは $e_*^{t(au^2+bv^2+2cu*v)}=F(t,u,v)$ とおき，微分方程式

$$\frac{\partial}{\partial t}F(t,u,v)=(au^2+bv^2+2cu*v)*F(t,u,v),\quad F(0,u,v)=1 \tag{7.1}$$

の実解析的解（一意性については定理6.1参照）として定義する．一般には(7.1)式を普通の微分方程式の形に直すところから始めるが，右辺を計算するためには使う積公式を決めないといけない．

7.1.1　*-指数関数のワイル順序表示

まず $u*v=uv-\frac{\hbar i}{2}$ に注意する．これより

$$au^2+bv^2+2cu*v=au^2+bv^2+2cuv-c\hbar i$$

であり，一意性を使うと $e_*^{t(au^2+bv^2+2cu*v)}=e^{-c\hbar it}e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}$ であるから，$e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}$ が t に関して実解析的に定義できればよい．

まず，au^2+bv^2+2cuv に対してモイヤル積公式で計算すると

$$\begin{aligned}&(au^2+bv^2+2cuv)*F(t,u,v)\\&\quad=(au^2+bv^2+2cuv)F+\hbar i\{(bv+cu)\partial_uF-(au+cv)\partial_vF\}\\&\qquad-\frac{\hbar^2}{4}\{b\partial_u^2F-2c\partial_v\partial_uF+a\partial_v^2F\}\end{aligned}$$

である．これは線形の偏微分方程式である．しかし，定理6.1より実解析的な解は一意的だから，以下では $e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}=f_t(au^2+bv^2+2cuv)$ のように解の形を制限して解く．すると，方程式の右辺は

$$\begin{aligned}&(au^2+bv^2+2cuv)*f_t(au^2+bv^2+2cuv)\\&\quad=(au^2+bv^2+2cuv)f_t(au^2+bv^2+2cuv)\\&\qquad-\hbar^2(ab-c^2)(f_t'(au^2+bv^2+2cuv)\\&\qquad\quad+f_t''(au^2+bv^2+2cuv)(au^2+bv^2+2cuv))\end{aligned}$$

と計算される．だから，$x=au^2+bv^2+2cuv$ とおくと

$$\frac{d}{dt}f_t(x)=xf_t(x)+\hbar^2D(f_t'(x)+xf_t''(x)) \tag{7.2}$$

という微分方程式を得る[1]．ただし $D=c^2-ab$ で，これを**判別式**と呼ぶ．

補題 7.1　微分方程式 (7.2) の初期関数 1 の解は

$$f_t(x)=\frac{1}{\cos(\hbar\sqrt{D}\,t)}\exp\Big\{\frac{x}{\hbar\sqrt{D}}\tan(\hbar\sqrt{D}\ t)\Big\}$$

で与えられる．これは u,v について $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元である．

証明　初期関数が 1 の場合で考える．これを解くには，$f_t(x)=g(t)e^{h(t)x}$ の形を予想し，代入してやると

$$\big\{g'(t)-D\hbar^2g(t)h(t)+xg(t)\{h'(t)-1-D\hbar^2h(t)^2\}\big\}e^{h(t)x}=0$$

となるから，まず $h'(t)-1-D\hbar^2h(t)^2=0$ となる $h(t)$ を求めると，これは変数分離型だからすぐに解けて，$h(t)=\frac{1}{\hbar\sqrt{D}}\tan(\hbar\sqrt{D}\,t)$ が得られる．複素数で考えているから $\sqrt{D}$ はとり方が 2 通りあるが，$\pm\sqrt{D}$ のとり方によらずに決まる．次に $g'(t)-g(t)D\hbar^2\frac{1}{\hbar\sqrt{D}}\tan(\hbar\sqrt{D}\,t)=0$ を解いて，$g(t)=\frac{1}{\cos(\hbar\sqrt{D}\,t)}$ が得られる．これも $\pm\sqrt{D}$ のとり方によらずに決まる．この解法においては t は実数に限る必要はない．　（証明終わり）

ともかく，これより

$$e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}=\frac{1}{\cos(\hbar\sqrt{D}\,t)}e^{(au^2+bv^2+2cuv)\frac{1}{\hbar\sqrt{D}}\tan(\hbar\sqrt{D}\,t)} \tag{7.3}$$

が得られた．$\cosh(is)=\cos s$, $\tanh(is)=i\tan s$ に注意してやれば，

$$e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}=\frac{1}{\cosh(\hbar\sqrt{-D}\ t)}e^{(au^2+bv^2+2cuv)\frac{1}{\hbar\sqrt{-D}}\tanh(\hbar\sqrt{-D}\,t)} \tag{7.4}$$

とも書かれる．この 2 通りの書き方は後で係数 a,b,c（実際には a,b,ci とか ia,ib,c）を実数に制限するときに便利である．

---

1)　初期関数が x の関数よりもっと一般のものだと，解くべき方程式はもっと面倒になるが，多変数の場合も込めて (7.19) 式で与えてある．

$\sqrt{D}$ の不定性は違いを生まないが，tan と cos の周期の違いは後々いろいろな問題を引き起こす.

式 (7.3), (7.4) を読むときには，右辺の 2 次式の判別式を D' とし，$D'+1$ を見ると，$\left(\frac{1}{\cosh(\hbar\sqrt{ab-c^2}\ t)}\right)^2$, $\left(\frac{1}{\cos(\hbar\sqrt{c^2-ab}\ t)}\right)^2$ などとなっていることに注目するとよい.

$ab-c^2=0$ のとき右辺はマクローリン展開で意味を考えれば

$$\frac{1}{\hbar\sqrt{ab-c^2}}\tanh(\hbar\sqrt{ab-c^2}\ t)=t$$

と読むべき式だから，（ここでは t はパラメーターとして扱われている．しかし相対論的に考えるならば t も座標関数のように思う理論がなければなるまい.）

$$e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}=e^{t(au^2+bv^2+2cuv)},\quad ab-c^2=0$$

となる．これは $au^2+bv^2+2cuv=(\sqrt{a}u+\sqrt{b}v)^2$ のときには $*$-指数関数と普通の指数関数が一致するといっていて，これがモイヤル積公式の特徴である.

以上をまとめると次の定理を得る.

定理 7.1 $*$-指数関数 $e_*^{(au^2+bv^2+2cuv)}$ はワイル順序表示では

$$\frac{1}{\cos(\hbar\sqrt{D})}\exp\left(\frac{1}{\hbar\sqrt{D}}\tan(\hbar\sqrt{D})(au^2+bv^2+2cuv)\right)$$

で与えられる．ただし，$D=0$ のところでは $\frac{1}{\hbar\sqrt{D}}\tan(\hbar\sqrt{D})=1$ とする.

とくに，$D=\frac{\pi^2}{\hbar^2}(2m+1)^2$, $m\in\mathbb{Z}$ のとき $e_*^{(au^2+bv^2+2cuv)}=-1$ であり，$D=\frac{\pi^2}{4\hbar^2}(2m+1)^2$, $m\in\mathbb{Z}$ のところは特異点である.

$D=1$ のときには $e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}$ はワイル順序表示では $t=\pm\frac{\pi}{2\hbar}$ が特異点である．しかし，このことは $e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}$ そのものが定義できないということを意味するのではない.

実解析的解が得られたからこれを使って，よく使われる公式を示しておこう.

補題 7.2（球撞き補題） $v*e_*^{itu*v}=e_*^{itv*u}*v$, $e_*^{itu*v}*u=u*e_*^{itv*u}$ が成立する.

証明 球撞きみたいに $u*(v*u)^m=(u*v)^m*u$ だから，多項式近似が成立していれば明らかである．この場合は両辺が同じ微分方程式を同じ初期値で満

たす実解析的な解であることより証明される．つまり，$v*$ の連続性と結合律より $\frac{d}{dt}v*e_*^{itu*v}=v*((iu*v)*e_*^{itu*v})=iv*u*(v*e_*^{itu*v})$.

一方，$*v$ の連続性と結合律より

$$\frac{d}{dt}e_*^{itv*u}*v=((iv*u)*e_*^{itu*v})*v=iv*u*(e_*^{itu*v}*v)$$

である．どちらも $\frac{d}{dt}f_t=iv*u*f_t$ なる微分方程式を満たしており，初期条件は v である．次の式もまったく同様である．（証明終わり）

定理 7.1 からすぐわかることを述べよう．

(a) 解の一意性から指数法則

$$\begin{aligned} e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)}*e_*^{\tau(au^2+bv^2+2cuv)}&=e_*^{(t+\tau)(au^2+bv^2+2cuv)},\\ e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv+\alpha)}&=e^{\alpha t}e_*^{t(au^2+bv^2+2cuv)} \end{aligned} \tag{7.5}$$

も得られる．ただし $\alpha\in\mathbb{C}$ である．

(b) e_*^{tuv} に関する指数法則を書き直すと，ワイル順序表示で

$$e^{\frac{s}{\hbar}2uv}*e^{\frac{t}{\hbar}2uv}=\frac{1}{1-st}e^{\frac{s+t}{1-st}\frac{1}{\hbar}2uv} \tag{7.6}$$

という積公式が得られる．公式 (7.6) は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ が $*$-積に関して代数的に閉じなくなっていることを示している．このこと自体は不思議なことではないが，計算しているものが 1 径数部分群の計算なのだから，代数の元としては存在しないとしても，群の元としてなら存在していると考えるほうが自然であろう．$\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元としてワイル順序表示で計算するために発散を起こしていると考えられる．これは，**多様体が一枚の座標系では覆えないために座標関数で表示すると見かけ上の特異点が出てくるのに似ている．**

(c) $u*v=u\cdot v-\frac{\hbar i}{2}$ だから $e_*^{itu*v}=e_*^{itu\cdot v}e^{\frac{\hbar t}{2}}$ であり

$$\varpi_{00}=\lim_{t\to\infty}e_*^{itu*v},\qquad \varpi_{00}*\varpi_{00}=\varpi_{00}$$

であることがわかる．これは真空と呼んでいたものが，指数関数の極限として得られることを示している．

> 時間発展の極限として得られ，その意味で安定になっているものを何か平衡状態のようなものと考える理解様式が物理の中にある．

(d) 定理 7.1 よりワイル順序表示で $e_*^{\frac{it}{\hbar}uv} = \frac{1}{\cosh\frac{t}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\tanh\frac{t}{2})2u\cdot v}$ であることがわかる．すると $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中で

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\cosh\frac{t}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\tanh\frac{t}{2})2u\cdot v} dt < \infty$$

となり，$uv(= u{\cdot}v)$ は異なる **2 つの逆元**

$$(u{\cdot}v)_+^{-1} = -i\hbar \int_0^{\infty} e_*^{\frac{it}{\hbar}u\cdot v} dt, \quad (u{\cdot}v)_-^{-1} = i\hbar \int_{-\infty}^{0} e_*^{\frac{it}{\hbar}u\cdot v} dt \tag{7.7}$$

を持つことがわかる．これは結合律を破ってしまう現象である．この 2 つの逆元の差は

$$(u{\cdot}v)_+^{-1} - (u{\cdot}v)_-^{-1} = -i\hbar \int_{-\infty}^{\infty} e_*^{\frac{it}{\hbar}u\cdot v} dt \tag{7.8}$$

であるが，右辺は $*$-積による 1 のフーリエ変換のように思ってもよいから，$-i\delta_*(uv)$（[31] 参照）のように書いてもよい．$e_*^{\frac{it}{\hbar}u\cdot v}$ をワイル順序表示で $\frac{1}{\cosh\frac{t}{2}} e^{\frac{i}{\hbar}(\tanh\frac{t}{2})2u\cdot v}$ と書いて，ハンセン – ベッセル (Hansen-Bessel) の公式（[21] 参照）

$$J_0(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{iz\cos t} dt$$

を使って式変形するとワイル順序表示で

$$(uv)_+^{-1} - (uv)_-^{-1} = -i \int_{-\infty}^{\infty} e_*^{\frac{it}{\hbar}uv} dt = \frac{\pi}{2i} J_0\Big(\frac{2}{\pi}uv\Big) \tag{7.9}$$

がわかる．これは **$*$-デルタ関数** $-i\delta_*(uv)$ のワイル順序表示である．

$$uv * \delta_*(uv) = \delta_*(uv) * uv = 0 \tag{7.10}$$

である．しかし，$\delta_*(uv)$ の正規順序表示は発散することが次節でわかる．

> 全部の表示を持たなくても，どれかの表示で表示できるものは $*$-積の元として意味があるものだと考えているのである．

前章 6.2 節の正規順序表示の中で起こった見慣れない現象がワイル順序表示でも起こっているのである．しかもワイル順序表示で計算するとほとんどの場合に 2 次式の $*$-指数関数は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中で 2 つの逆元を持つのである．この場合どちらの逆元を採用してもよいのだが，両方採用すると結合律は壊れる．

このことが対称性を破らなければならなくなる原因である.

(5.29) 式より

$$(uv - \tfrac{\hbar i}{2}) * e^{\frac{2i}{\hbar}uv} = u*v*e^{\frac{2i}{\hbar}uv} = 0,\ (uv + \tfrac{\hbar i}{2}) * e^{-\frac{2i}{\hbar}uv} = v*u*e^{-\frac{2i}{\hbar}uv} = 0$$

であるから uv, ϖ_{00} を含む結合代数の中では $uv - \frac{\hbar i}{2}$ は逆元を持ち得ない. 同様に $uv, \bar{\varpi}_{00}$ を含む結合代数の中では $uv + \frac{\hbar i}{2}$ は逆元を持ち得ない. これより, **$uv - \frac{\hbar i}{2}$ と ϖ_{00} は同じ結合代数の中に同居できない**. しかしこのような線引きをどのように行なうべきか一般論はないのが現状である. 作用素表現を付けられる部分を取り出せばそこでは自動的に結合律を満たすわけだが, こういってみても解決策にはならない.

7.1.2 正規順序表示

2 次の指数関数を今度は正規順序表示で計算してみよう. 微分方程式 (7.1) を正規順序表示で計算するのである. まず実解析的解の一意性を利用して, 次のように解の形を仮定する：

$$e_*^{t(au^2+bv^2+c(u*v+v*u))} = s(t)e^{a(t)u^2+b(t)v^2+c(t)(u*v+v*u)}.$$

そうすると, (7.1) 式を解くことは常微分方程式系を解くことに替わる.

この 2 通りのやり方は第 2 章で運動の方程式を考えたときにすでに現れている. この方法は解のおおよその形が有限個のパラメーターを含む形でわかっているときには強力な方法である. 別の方向からいえば第 2 章の運動の方程式のときに点描像がはたした役割はこのようなものでしかない.

正規順序では $u*v = u\circ v, v*u = u\circ v + \hbar i$ であり, また $uv = \frac{1}{2}(u*v + v*u)$ だから, $au^2 + bv^2 + c(u*v + v*u) = au^2 + bv^2 + 2cuv + c\hbar i$ に注意し, 指数法則 (7.5) に注意すれば $e_*^{t(au^2+bv^2+2cu*v)}$ の公式も同時に得られるので, どれか計算しやすいほうで計算すればよい.

しかし, 公式は $\sqrt{\cdot}$ の $\pm$ の不定性を含んでしまう. **このことは見かけはたいした問題ではないように思えるのだが, 実は大変な問題を引き起こすのである.**

正規順序表示で次のようにおく：

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu*v)} = \psi(t)e_\circ^{\phi_1(t)u^2+\phi_2(t)v^2+2\phi_3(t)u\circ v}.$$

すると次の常微分方程式系を初期条件 $\phi_i(0)=0,\ \psi(0)=1$ で解けばよいことがわかる（微分方程式の解法はしょせん名人芸だから，読者は (7.12) 式を代入して検算するだけでもよい）：

$$\begin{cases} \phi_1'(t) = \dfrac{1}{\hbar}a + 4ic\phi_1(t) - 4\hbar b\phi_1(t)^2, \\ \phi_2'(t) = \dfrac{1}{\hbar}b + 4ib\phi_3(t) - 4\hbar b\phi_3(t)^2, \\ \phi_3'(t) = \dfrac{1}{\hbar}c + 2ic\phi_3(t) + 2ib\phi_1(t) - 4\hbar b\phi_1(t)\phi_3(t), \\ \psi'(t) = -2\hbar b\phi_1(t)\psi(t). \end{cases} \tag{7.11}$$

これは，微積分の恰好の演習問題である．少し汗をかいてもらえば次がわかる．

命題 7.1　常微分方程式系 (7.11) は t について実解析的な解

$$\begin{cases} \phi_1(t) = \dfrac{a}{2\hbar}\dfrac{\sin(2\sqrt{D}\,t)}{\sqrt{D}\cos(2\sqrt{D}\,t) - ic\sin(2\sqrt{D}\,t)}, \\ \phi_2(t) = \dfrac{b}{2\hbar}\dfrac{\sin(2\sqrt{D}\,t)}{\sqrt{D}\cos(2\sqrt{D}\,t) - ic\sin(2\sqrt{D}\,t)}, \\ \phi_3(t) = \dfrac{i}{2\hbar}\Big(1 - \dfrac{\sqrt{D}}{\sqrt{D}\cos(2\sqrt{D}\,t) - ic\sin(2\sqrt{D}\,t)}\Big), \\ \psi(t) = e^{-cit}\Big(\dfrac{\sqrt{D}}{\sqrt{D}\cos(2\sqrt{D}\,t) - ic\sin(2\sqrt{D}\,t)}\Big)^{1/2} \end{cases} \tag{7.12}$$

を持つ．ただし $D=c^2-ab$ である．$\sqrt{D}$ の不定性は影響がない．また $D=0$ のときにはテイラー展開で $\frac{\sin(2\sqrt{D}\,t)}{\sqrt{D}} = 2t$ とおけば，この場合にも使える．しかし，ψ における $(\ )^{1/2}$ の不定性は残る（分母に c がむきだしで入っていることに注意）．

実はこの不定性は消すことができないというのが結論なのであるが，その前に命題 7.1 が述べていることを詳しく見ていこう．

命題 7.1 からの結論

(1) とくに $\sqrt{D}=\pm c$ の場合は $(e^{2cit})^{1/2}=e^{cit}$ とすれば振幅部分が恒等的に 1 の実解析解が得られるから，$ab=0$（つまり a, b のどちらかが 0）として

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}(au^2+bv^2+2cu\circ v)} = e_\circ^{\frac{1}{4ci\hbar}(e^{4cit}-1)(au^2+bv^2)+\frac{1}{2\hbar i}(e^{2cit}-1)2u\circ v} \tag{7.13}$$

がわかる．$t \in \mathbb{C}$ については特異点を持たない．

指数法則を書き直すと，次のような積公式も得られる：

$$e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}su\circ v} * e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}tu\circ v} = e_\circ^{\frac{1}{\hbar i}(s+t+st)u\circ v}. \tag{7.14}$$

(7.14) 式と (7.6) 式とを拡張された相互変換の式 (6.13) を通して調べると

$$I_\cdot^\circ(e^{\frac{s}{\hbar}2uv} * e^{\frac{t}{\hbar}2uv}) = I_\cdot^\circ(e^{\frac{s}{\hbar}2uv}) * I_\cdot^\circ(e^{\frac{t}{\hbar}2uv})$$

もわかる．また次の真空の正規順序表示の公式も得られる：

$$\varpi_{00} = \lim_{t\to\infty} e_*^{itu*v} = e_\circ^{\frac{i}{\hbar}u\circ v}. \tag{7.15}$$

(2) 正準共役対を固定する限り，どの順序表示でも $*$-指数関数 $e_*^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ には特異点が出てくる（$(a,b,c) \in \mathbb{C}^3$ 全体では定義されない）．

(3) $c^2 - ab = 1$ のとき $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ はワイル順序表示では発散であるが，

$$au^2 + bv^2 + 2cuv = au^2 + bv^2 + c(u*v+v*u) = au^2 + bv^2 + 2cu*v + c\hbar i$$

に注意して e^{-cit} の部分を扱うと，(u,v) に関する正規順序表示では

$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+c(u*v+v*u))} = \sqrt{-1}e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v} \tag{7.16}$$

となり，$c^2 - ab = 1$ である限りまったく一定になってしまう．

これより，$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+c(u*v+v*u))}$ は何か 1 つのものに見えるので，これを**極地元**と呼び，ε_{00} のように書く．容易な計算で

$$\varepsilon_{00} * \varepsilon_{00} = -1, \quad \mathrm{Ad}(\varepsilon_{00}) = -I \tag{7.17}$$

がわかるのだが ε_{00} はかなり奇妙な性質を持っている：

ε_{00} は矛盾を引き起こす元 ??

まず，指数法則より $\varepsilon_{00}*\varepsilon_{00} = -1$ であったが，これは $\varepsilon_{00} = \sqrt{-1}$ を意味するわけではない．球擋き補題 7.2 より次がいえるからである．

補題 7.3　極地元 ε_{00} は $\varepsilon_{00}*\varepsilon_{00}=-1$ なる性質を持っていて，座標関数 u,v と反交換する．$u*\varepsilon_{00}+\varepsilon_{00}*u=0$, $v*\varepsilon_{00}+\varepsilon_{00}*v=0$ である．

証明　第 1 の式は定義と指数法則より明らかである．第 2 の式は球撞き補題 7.2 により $v*e_*^{tu*v}=e_*^{tv*u}*v=e^{i\hbar t}e_*^{tu*v}*v$ だから，$t=\frac{\pi}{\hbar}$ とし，$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u*v}=i\varepsilon_{00}$ に注意すればよい．　（証明終わり）

これは $u*\varepsilon_{00}+\varepsilon_{00}*u=0$ という式が ε_{00} に関して線形だから ε_{00} が $\pm$ に曖昧さを残しているとしてもこのように考えないといけないのである．

補題 7.3 より次がわかる．

補題 7.4　ε_{00} は任意の偶元（$f(-u,-v)=f(u,v)$ を満たす元）と可換である．とくに任意の $e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}$ とも可換である．

最も奇妙なのは次のことである．$(a,b,c)=(0,0,1)$ と $(0,0,-1)$ とは $c^2-ab=1$ を満たす集合の中で弧状連結だが，命題 7.1 によれば

$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(u*v+v*u)}=\sqrt{-1}e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}=e_*^{-\frac{\pi}{2\hbar}(u*v+v*u)}$$

とおくべきである．連続的につながっているのだから，$\sqrt{-1}$ は i か $-i$ かのどちらかに決められる．

一方，$*$-指数関数 $e_*^{\frac{t}{2\hbar}(u*v+v*u)}$ の指数法則 (7.5) を考えると，

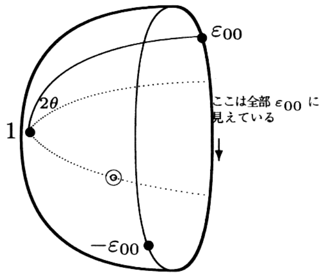
$$e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(u*v+v*u)}=ie_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v},\quad e_*^{-\frac{\pi}{2\hbar}(u*v+v*u)}=-ie_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$$

としなければならないことがわかる．しかし，この $\sqrt{-1}$ の不定性がないものとすると，指数法則から

$$\boxed{-1=e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(u*v+v*u)}*e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(u*v+v*u)}=e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(u*v+v*u)}*e_*^{-\frac{\pi}{2\hbar}(u*v+v*u)}=1}$$

ということになってしまう．これは $(-v,u)$ も正準共役対ということを考慮して，$\varepsilon_{00}=ie_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}=ie_\odot^{\frac{2i}{\hbar}(-v)\odot u}$ のようにおいた場合も同じである．

一見これは矛盾に見えるのだが，著者はそうは考えていない．ε_{00} は本来 **2-価の元，または $\pm i$ を動く不定元**として扱うべきものであるのにそうしてないために矛盾に見えているだけである（定理 7.2 参照）．



(モノドロミー的現象)
注意して計算すると $\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{i\theta}{2\hbar}(u^2+v^2)})e_*^{2tuv} = e_*^{t((\sin 2\theta)(u^2-v^2)+(\cos 2\theta)2uv)}$ がわかる．右辺の 2 次式の判別式は 1 だから $t=\frac{\pi}{2\hbar}$ のときには右辺は θ に無関係に ε_{00} となる．t に関する 1 径数部分群 $\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{i\theta}{2\hbar}(u^2+v^2)})e_*^{2tuv}$ を $t\in[0,\frac{\pi}{2\hbar}]$ で考え，2θ を 0 から π まで動かしてみると，$2\theta=\frac{\pi}{2}$, $t=\frac{\pi}{4\hbar}$ のところに特異点が現れる．これは (7.11) 式そのものが持っている性格と理解すべきものである．

命題 7.2 ε_{00} の u,v に関する正規順序表示を量子正準共役対

$$u'=au+bv,\quad v'=cu+dv,\quad ad-bc=1$$

に関する正規順序表示に変換すると次のようになる：

$$e^{\frac{\hbar i}{2}(-bd\partial_u^2+(ad+bc-1)\partial_u\partial_v-ac\partial_v^2)}\sqrt{-1}e_{\circ}^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}=\sqrt{-1}e_{\diamond}^{\frac{2i}{\hbar}u'\diamond v'}.$$

とくに ε_{00} の u,v に関する反正規順序表示は $\sqrt{-1}e_{\bullet}^{-\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$ である．

つまり，ε_{00} はいつでも都合よく見えている元で，どの正規順序表示でもそれに関する表示で $\sqrt{-1}e_{\diamond}^{\frac{2i}{\hbar}u'\diamond v'}$ のように見える元である．

次節で考える u,v で張られる線形空間への随伴表現では $\mathrm{Ad}(\varepsilon_{00})=-I$ で，$\mathrm{Ad}(\varepsilon_{00}^2)=I$ だが，$\varepsilon_{00}^2=-1$ である．さらに，極地元 ε_{00} は $e_*^{\frac{\pi i}{2\hbar}(u^2+v^2)}$ とも見ることができるわけだから，複素共役元 $\overline{\varepsilon_{00}}$ といったものは定義できない．

(4) 同様の奇妙な現象は $c^2-ab=1$ で $c=2$ とし，$t=\frac{\pi}{2}$ としたときの $\tilde{\varepsilon}=e_*^{\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+4u*v)}$ の計算にも現れる．

指数法則に従えば $\tilde{\varepsilon}^{-1}=e_*^{-\frac{\pi}{2\hbar}(au^2+bv^2+4u*v)}$ であるが，命題 7.1 の公式によれば $\tilde{\varepsilon}=\tilde{\varepsilon}^{-1}=-\sqrt{-1}e_{\circ}^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$ である．一方 $\tilde{\varepsilon}_*^2$ は ΨDO-積公式による直接計算では $\tilde{\varepsilon}_*^2=-1$ となってしまうのである (計算は 11.1.3 項参照)．

7.2　曖昧被覆群

2-価の元などという概念はこれまでの数学の中に登場したことがないから安直に使うのはいけないと思われるが ε_{00} のような元は $2m$-変数でも現れる．前節のような奇妙なことがどのようにして起こっているのか（少々専門家向きになるが）多変数の場合を含めてもう少し詳しく見てみよう．多変数の場合には

$$\boldsymbol{z}=(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}),\quad \boldsymbol{u}=(u_1,\cdots,u_m),\quad \boldsymbol{v}=(v_1,\cdots,v_m)$$

（${}^t\boldsymbol{z}$という記号も使う．これは転置行列の意味で$\boldsymbol{z}$を縦に並べたもの.）

とおくと，命題 5.1 と同じ証明でモイヤル積公式は $Sp_{\mathbb{C}}(m)$-不変となる．$Sp_{\mathbb{C}}(m)$ とは $J=\begin{bmatrix}0 & -I_m\\ I_m & 0\end{bmatrix}$ としたとき（I_m は m 次の単位行列），

$$Sp_{\mathbb{C}}(m)=\left\{S\in M_{\mathbb{C}}(2m); SJ\,{}^tS=J\right\}\quad (^tS \text{ は } S \text{ の転置行列})$$

で定義される行列群で，**複素シンプレクティック群**と呼ばれるリー群である．リー環は $sp_{\mathbb{C}}(m)=\left\{A\in M_{\mathbb{C}}(2m); AJ+J\,{}^tA=0\right\}$ である．$Sp_{\mathbb{C}}(1)\cong SL_{\mathbb{C}}(2)$ である．次のことに注意する：

$$A=\text{対称行列}\Leftrightarrow AJ\in sp_{\mathbb{C}}(m),\quad S\in Sp_{\mathbb{C}}(m)\Leftrightarrow J\,{}^tS=S^{-1}J. \tag{7.18}$$

7.2.1　多変数の指数関数と積公式

前節の計算を見ながら次のことを考える．複素対称行列を A としたとき $*$-指数関数 $e_*^{\boldsymbol{z}(tA)\,{}^t\boldsymbol{z}}$ はどう書かれるか．また対称行列 A,B と $g,g'\in\mathbb{C}$ について，$*$-積 $(ge^{\boldsymbol{z}A\,{}^t\boldsymbol{z}})*(g'e^{\boldsymbol{z}B\,{}^t\boldsymbol{z}})$ の公式はどうなるか．そのとき極地元とか真空に相当するものはどのようになるかを考えよう．

指数関数 $e_*^{\boldsymbol{z}(tA)\,{}^t\boldsymbol{z}}$ と $e^{\boldsymbol{z}B\,{}^t\boldsymbol{z}}$ の積 $e_*^{\boldsymbol{z}(tA)\,{}^t\boldsymbol{z}}*e^{\boldsymbol{z}B\,{}^t\boldsymbol{z}}$ を定義するときの微分方程式（(7.2) 式に相当するもの）は，上の積を $g(t)e^{\boldsymbol{z}Q(t)\,{}^t\boldsymbol{z}}$ と書いて，さらに $q(t)=-Q(t)J,\ a=-AJ,\ b=-BJ\in sp_{\mathbb{C}}(m)$ とおき（がんばって）計算すると

$$\frac{d}{dt}q(t)=(1+\hbar iq)a(1-\hbar iq),\quad \frac{d}{dt}g(t)=\frac{\hbar^2}{2}\mathrm{Tr}(aq(t))g(t) \tag{7.19}$$

で与えられることがわかる．左辺の積は $2m\times2m$ 行列としての積であり $sp_{\mathbb{C}}(m)$ の元になっている．Tr は行列の跡 (trace) であり，初期条件は $q(0)=b,\ g(0)=1$ である．

この方程式を解くにはケーリー (Cayley) 変換と呼ばれる変換 $C(X)=\frac{1-X}{1+X}$ を使うとよい．ケーリー変換には次の性質がある：

$$X\in sp_{\mathbb{C}}(m)\Leftrightarrow C(X)\in Sp_{\mathbb{C}}(m),\quad C^2(X)=X. \tag{7.20}$$

(7.19) 式の第 1 式をケーリー変換して $Sp_{\mathbb{C}}(m)$ 上の式として書き直すと

$$\frac{d}{dt}C(\hbar iq)=-2\hbar iaC(\hbar iq),\quad C(\hbar iq(0))=C(\hbar ib) \tag{7.21}$$

となる．a が t に依存しないので，これは簡単に解けて

$$C(\hbar iq(t))=e^{-2\hbar ita}C(\hbar ib)=C\left(\frac{1-e^{-2\hbar ita}}{1+e^{-2\hbar ita}}\right)C(\hbar ib) \tag{7.22}$$

となる．したがって $q(t)=\frac{1}{\hbar i}C^{-1}(C(i\tan(t\hbar a))C(\hbar ib))$．とくに $b=0$ の場合には $q(t)=\frac{1}{\hbar}\tan(t\hbar a)$ となる．

$g(t)$ は $\frac{d}{dt}\log g=\frac{\hbar^2}{2}\mathrm{Tr}(aq(t))$ を解けばよいのだが，これをまともに実行するのは避けて次のように考えるとよい．まず，解くべき微分方程式 (7.19) は a が t に依存して $a=a(t)$ であってもまったく同じである．そこで解が $q(t)=t\hat{a}$ の形になるように $g(t)$ のほうを選ぶことを考える．(7.19) 式を書き直すと

$$\hat{a}=(1+\hbar iq)a(t)(1-\hbar iq),\quad \frac{d}{dt}g(t)=\frac{\hbar^2}{2}\mathrm{Tr}(a(t)t\hat{a})g(t) \tag{7.23}$$

であり，第 1 式より $a(t)$ を求めて第 2 式に代入すると

$$\frac{d}{dt}\log g=\frac{1}{4}\mathrm{Tr}\left(\frac{d}{dt}\log(1+\hbar^2t^2\hat{a}^2)\right)$$

となり，これより $g(t)=\det(1+i\hbar t\hat{a})^{1/2}$ が得られる ($\det(1+i\hbar ta)=\det(1-i\hbar ta)$ に注意)．つまり，$\hbar a\in sp_{\mathbb{C}}(m)$ を任意に動かして

$$\det(1+i\hbar\hat{a})^{\frac{1}{2}}\ e^{\boldsymbol{z}(\hat{a}J)\,{}^t\boldsymbol{z}} \tag{7.24}$$

で与えられる曲面の上に指数関数 $e_*^{\boldsymbol{z}(tA)\,{}^t\boldsymbol{z}}$ は載っていなくてはならないのである[2)]．これより，$\hat{a}$ のところに $q(t)=\frac{1}{\hbar}\tan(t\hbar a)$ を代入すると

$$\det(1+i\hbar q(t))=\det(1+i\tan(t\hbar a))=\det\cos^{-1}(t\hbar a)$$

2)　このためには扱っている微分方程式系が包合性の条件というものを満たさなくてはならないのだが，この場合には無限小の群作用で分布が与えられているので，これが保証されている．

だから，全部あわせ，解が $t=0$ で 1 となるように根号を開くと

$$e_*^{\boldsymbol{z}(tA)\,{}^t\boldsymbol{z}} = (\det\cos(t\hbar a))^{-\frac{1}{2}}\, e^{\boldsymbol{z}(\frac{1}{\hbar}\tan(t\hbar a)\,J)\,{}^t\boldsymbol{z}} \tag{7.25}$$

がわかる．$\det\cos(t\hbar a) = 0$ となるところで $*$-指数関数のワイル順序表示は発散するが，a を対角化して考えれば発散のしかたにいろいろなパターンがあることがわかる．最も極端な発散は $\cos(t\hbar a) = 0$ のところで起こる．これは $e^{it\hbar a} = \pm iI_{2m}$ となるところである．

$\det\cos(t\hbar a) = 0$ となるところで $*$-指数関数は発散するが，相互変換を使って正規順序表示に直してみると発散していないことがわかる（(11.6) 式も参照）．ワイル順序表示から正規順序表示への相互変換は (6.7) 式で与えられるから，多変数の場合にも 6.1.3 項のやり方で解いてみると次のことがわかる：

$$e^{\frac{\hbar i}{2}\sum_i \partial_{u_i}\partial_{v_i}}(ge^{\boldsymbol{z}A\,{}^t\boldsymbol{z}}) = Ge^{\boldsymbol{z}Q\,{}^t\boldsymbol{z}}. \tag{7.26}$$

ただし右辺は $Z = \begin{bmatrix} 0 & I_m \\ I_m & 0 \end{bmatrix}$ として

$$Q = (I - \hbar iAZ)^{-1}A, \quad G = g\det(I - \hbar iAZ)^{-\frac{1}{2}}$$

である．そこで (7.25) 式を見ながら (7.26) 式の A のところに $\frac{1}{\hbar}\tan(t\hbar a)J$, g のところに $(\det\cos(t\hbar a))^{-\frac{1}{2}}$ を代入すると正規順序表示は次のようになる：

$$e_*^{\boldsymbol{z}(tA)\,{}^t\boldsymbol{z}} = \big(\det(\cos(t\hbar a) - i\sin(t\hbar a)JZ)\big)^{-\frac{1}{2}} e_\circ^{\boldsymbol{z}Q\,{}^t\boldsymbol{z}}, \tag{7.27}$$

$$Q = \big(\cos(t\hbar a) - i\sin(t\hbar a)JZ\big)^{-1}\frac{1}{\hbar}\sin(t\hbar a)\,J.$$

a を対角化して考えてみれば $\det\cos(t\hbar a) = 0$ であっても発散しないことがわかる．とくに $\cos(t\hbar a) = 0$ となるような t のところでは $\sin(t\hbar a) = \pm I_{2m}$ だから，そこでは $e_*^{\boldsymbol{z}(tA)\,{}^t\boldsymbol{z}}$ の正規順序表示は A とは無関係に $\sqrt{-1}^m e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}\sum_i u_i\circ v_i}$ となる．$\varepsilon_{00}(i) = \sqrt{-1}e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u_iv_i}$ とおけば

$$\varepsilon_{00}(1) * \cdots * \varepsilon_{00}(m) = \sqrt{-1}^m e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}\sum_i u_i\circ v_i}$$

である．$\varepsilon_{00}(i)$, $i = 1, \cdots, m$ は補題 7.4 より 2 次の指数関数の系の中ではすべての元と可換だから，一般にはワイル順序表示で発散している元は正規順序表示ではいくつかの $\varepsilon_{00}(i)$ の積とワイル順序表示で表示される 2 次の指数関数の積の形に書かれる．正規順序表示による 2 次の指数関数の公式は第 11 章でも扱う．

積公式

上の考え方で $(ge^{\boldsymbol{z}A\,{}^t\boldsymbol{z}})*(g'e^{\boldsymbol{z}B\,{}^t\boldsymbol{z}})$ の公式も計算できる．(7.22) 式を見れば積公式の位相部分は $C(\hbar iq)=C(\hbar ia)C(\hbar ib)$ のように群 $Sp_{\mathbb{C}}(m)$ の中での計算になっていることが読みとれるから，積公式は

$$(\det(1+i\hbar a)^{\frac{1}{2}};a)*(\det(1+i\hbar b)^{\frac{1}{2}};b)=(\spadesuit;\frac{1}{\hbar i}C^{-1}(C(\hbar ia)C(\hbar ib)))$$

のような姿になるはずである．そうすると ♠ の部分は (7.24) 式で与えられる曲面に載っているという条件で決まるので，これを計算すると

$$\spadesuit=\left(\det\frac{(1+i\hbar a)(1+i\hbar b)}{1-\hbar^2 ab}\right)^{\frac{1}{2}}$$

という式が得られる．これより普通の指数関数どうしの積公式は

$$(ge^{\boldsymbol{z}A\,{}^t\boldsymbol{z}})*(g'e^{\boldsymbol{z}B\,{}^t\boldsymbol{z}})=gg'(\det(1-\hbar^2ab))^{-\frac{1}{2}}e^{\boldsymbol{z}Q\,{}^t\boldsymbol{z}}, \tag{7.28}$$

$$Q=-\frac{1}{\hbar i}C^{-1}(C(\hbar ia)C(\hbar ib))J$$

のように求められる．$\det(1-\hbar^2ab)=0$ のところでは積が定義されていないが，これはワイル順序表示だからで，正規順序表示による積公式はこの場所では発散しないことがわかる．

2 変数で詳しく積を計算してみると，たとえば

$$\begin{aligned}&e_*^{\frac{ti}{\hbar}u^2}*e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)}\\&=\frac{1}{\sqrt{P}\cos r}\,e^{\frac{1}{P}((\tan r+(1-\tan^2 r)t)iu^2+(\tan r)iv^2+(t\tan r)2iuv)}\end{aligned} \tag{7.29}$$

である．ただし $P=1-t\tan r$ である．さらに $e_*^{\frac{t}{\hbar}2uv}=\sqrt{1+s^2}\,e^{\frac{s}{\hbar}2uv}$ に注意し，$P=1-2cs+(c^2-ab)s^2$ とおくと

$$\begin{aligned}&e^{\frac{s}{\hbar}2uv}*e^{\frac{1}{\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)}\\&=\frac{1}{\sqrt{P}}e^{\frac{1}{\hbar P}(a(1+is)^2u^2+b(1-is)^2v^2+(c-(c^2-ab-1)s-cs^2)2uv)}\end{aligned} \tag{7.30}$$

という式も得られる（[31] 参照）．

2 次の指数関数の積は上のように 1 つの表示の中だけでは必ず発散する場所があるが，いろいろな順序表示を使うと計算できることがわかる．積が定義できているところでは結合律が成立する．

また真空にあたる元は A^{-1} が存在し，かつ

$$(ge^{zA\,{}^t z}) * (ge^{zA\,{}^t z}) = ge^{zA\,{}^t z} \quad \text{（このような元を冪等元という）}$$

を満たす元だとしてやると (7.28) 式より，$2^m e^{\pm\frac{i}{\hbar}zZ\,{}^t z}$ であることがわかる．見慣れてくると多変数の計算も 2 変数の計算も同じようなものだとわかるから，次項以降ではおもに 2 変数で計算する．

このへんの計算をアバウトにやってしまうと，$\frac{1}{2}$ となっているところは 1 の間違いではなかろうかといった悪夢にとり付かれるであろう．確かにこの悪夢を払い切るのは計算の努力が要るところである．

7.2.2 随伴表現

$\exp\left(t\mathrm{ad}\left(\frac{i}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)\right)\right)$, $(a,b,c \in \mathbb{C})$ が $(\mathbb{C}[u,v],*)$ の同型写像となることは明らかで，生成元のところでは

$$\mathrm{ad}\left(\frac{i}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)\right)\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-c & -b\\ a & c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix} \tag{7.31}$$

だから，この行列を A と書けば，$*$-積で書かれた多項式 $p(u,v)$ に対しては

$$\exp\left(t\mathrm{ad}\left(\frac{i}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv)\right)\right)p(u,v) = p\left(e^{tA}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right)$$

となるが，モイヤル積の特徴的性質から $\cdot$-積で書かれた多項式 f に対しても同様の書き方をしてもよいことがわかる．

a,b,c を任意に動かせば跡 (trace) が 0 の 2×2 行列全体 $sl_{\mathbb{C}}(2)$ が得られるから，$\{e^{tA}; A \in sl_{\mathbb{C}}(2)\}$ は行列群 $SL_{\mathbb{C}}(2)$ を生成している．

$\exp t\mathrm{ad}(\frac{i}{2\hbar}(au^2+bv^2+2cuv))$ は $e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)}$ がうまく定義できれば

$$\begin{aligned} &e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} * f\left(\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right) * e_*^{-it(au^2+bv^2+2cuv)} \\ &= f\left(\exp\left\{2\hbar t\begin{bmatrix}-c & -b\\ a & c\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}u\\v\end{bmatrix}\right) \end{aligned} \tag{7.32}$$

のように書いてもよい．うまく定義できるといった意味は結合律

$$(e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} * f(u,v)) * e_*^{-it(au^2+bv^2+2cuv)}$$
$$=e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} * (f(u,v) * e_*^{-it(au^2+bv^2+2cuv)})$$

が成り立つという意味であり，これがないと解の一意性を使って (7.32) 式の等式を証明できないのだが，$e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)} \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ がわかっているので f が多項式程度の関数だと上の結合律が成立する．

つまり，$Q = au^2 + bv^2 + 2cuv$ として $\mathrm{Ad}(e_*^{itQ})f(u,v) = e_*^{itQ}*f(u,v)*e_*^{-itQ}$ のような記号を使うと，$\mathrm{Ad}(e_*^{itQ})f(u,v) = e^{it\mathrm{ad}(Q)}f(u,v)$ が成立している．

$\exp t\mathrm{ad}(\frac{i}{2\hbar}(au^2 + bv^2 + 2cuv))$ は線形変換としての意味しか持たないが，$e_*^{it(au^2+bv^2+2cuv)}$ は単独で意味を持つ元である．

面白いのは次のことが成立することである．

命題 7.3 $\{e_*^Q; Q \in sl_{\mathbb{C}}(2)\}$ は $\pm$ に曖昧さを残している "群"$\tilde{G}$ を生成する．しかも $\mathrm{Ad}(\tilde{G}) = SL_{\mathbb{C}}(2)$ であり，$\tilde{G}$ は単連結である $SL_{\mathbb{C}}(2)$ の連結 2 重被覆のように見える（$\tilde{G}$ は後で曖昧被覆群と呼ばれる）．

連結 2 重被覆のように見える理由は e_*^{tuv} が $1, \varepsilon_{00}, -1, -\varepsilon_{00}$ を通過する 1 径数部分群だからである．この "群" はある曖昧ベクトル束上の平坦な接続の "極大積分曲面" と解釈できるのである．

7.2.3 実形式と $\mathrm{Ad}^{-1}(SU(2))$

ここでは $\mathrm{Ad}(\tilde{G}) = SL_{\mathbb{C}}(2)$ の中に含まれている実リー群を調べる．

複素リー代数 $sl_{\mathbb{C}}(2)$ の中には次のような実リー代数（係数体を $\mathbb{R}$ とするリー代数）が含まれている：

$SL_{\mathbb{R}}(2)$ のリー環 ：$\frac{i}{\hbar}u^2$, $\frac{1}{\hbar}2iuv$, $\frac{i}{\hbar}(u^2+v^2)$ で生成されるリー代数
$SU(1,1)$ のリー環：$\frac{1}{\hbar}(u^2-v^2)$, $\frac{1}{\hbar}2iuv$, $\frac{1}{\hbar}(u^2+v^2)$ で生成されるリー代数
$SU(2)$ のリー環 ：$\frac{1}{\hbar}(u^2-v^2)$, $\frac{1}{\hbar}2uv$, $\frac{1}{\hbar}i(u^2+v^2)$ で生成されるリー代数

$e_*^{\frac{t}{\hbar}u^2}$, $e_*^{\frac{t}{\hbar}v^2}$, $e_*^{\frac{t}{\hbar}(u^2-v^2)}$, $e_*^{\frac{t}{\hbar}2iuv}$, $e_*^{\frac{t}{\hbar}(u^2+v^2)}$ の随伴表現を見ると $r,s,t \in \mathbb{C}$ として次のようになっている：

$$e_*^{\frac{r}{\hbar}u^2} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -ri & 1 \end{bmatrix}, \quad e_*^{\frac{s}{\hbar}iuv} \to \begin{bmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^s \end{bmatrix}, \quad e_*^{\frac{t}{\hbar}v^2} \to \begin{bmatrix} 1 & ti \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_*^{\frac{\theta}{2\hbar}(u^2+v^2)} \to \begin{bmatrix} \cosh\theta & i\sinh\theta \\ -i\sinh\theta & \cosh\theta \end{bmatrix}, \quad e_*^{\frac{s}{2\hbar}(u^2-v^2)} \to \begin{bmatrix} \cos s & i\sin s \\ i\sin s & \cos s \end{bmatrix}$$

であるから，

$$\{\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)} * e_*^{\frac{s}{\hbar}iuv} * e_*^{\frac{ti}{\hbar}u^2}); r,s,t\in\mathbb{R}\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix} \cos r & -\sin r \\ \sin r & \cos r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-s} & 0 \\ 0 & e^{s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{bmatrix}; r,s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

となり，ワイル順序表示では定理 7.1 により

$$e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)} = \frac{1}{\cos\frac{r}{2}}\exp\Big((\tan\frac{r}{2})(\frac{i}{\hbar}(u^2+v^2))\Big)$$

で周期が 4π であることを考えれば，$\mathrm{Ad}^{-1}(SL_{\mathbb{R}}(2))$ は $SL_{\mathbb{R}}(2)$ の 2 重被覆群であることがわかる．$SU(1,1)$ についても同様である．つまり，このような集合の上では $\pm\sqrt{\cdot}$ の処理が不定性なく行なえるわけである．

$\mathrm{Ad}^{-1}(SL_{\mathbb{R}}(2))$ をもう少し詳しく見ると $e_*^{\frac{s}{\hbar}iuv}, e_*^{\frac{t}{\hbar}iu^2}$ はワイル順序表示で $\forall s,\ t\in\mathbb{R}$ に対して計算できるのだが，$e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)} = \frac{1}{\cos r}e^{i(u^2+v^2)\frac{1}{\hbar}\tan r}$ だから，2 重被覆の部分は $e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u^2+v^2)}$ の部分から現れる．これの代わりに $e_*^{\frac{r}{2\hbar}i(u+iv)*(u-iv)}$（$\cdot$-積が $*$-積に代わっていることに注意）を使うと，周期が半分になり $SL_{\mathbb{R}}(2)$ と同型のものが出てくる．これは振幅部分がずれて $\tilde{G}$ の中に入っているのである．

$SU(2)$ は $r,s,t\in\mathbb{R}$ として $\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{r}{2\hbar}(u^2-v^2)})$, $\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{s}{\hbar}2uv})$, $\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{t}{2\hbar}i(u^2+v^2)})$ で生成されている．

$$\{\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{r}{2\hbar}(u^2-v^2)} * e_*^{\frac{s}{2\hbar}2iuv} * e_*^{\frac{ti}{2\hbar}(u^2+v^2)}; r,s,t\in\mathbb{R}\}$$
$$=\left\{\begin{bmatrix} \cos r & i\sin r \\ i\sin r & \cos r \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{is} & 0 \\ 0 & e^{-is} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{bmatrix}; r,s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

$\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{s}{2\hbar}2iuv})$ は s に関して周期が 2π であるが，$e_*^{\frac{s}{2\hbar}2iuv}$ 自身はワイル順序表示では定理 7.1 により s に関して周期が 4π である．この 1 径数部分群を $g*e_*^{\frac{s}{2\hbar}2iuv}*g^{-1}$ のように変換することで任意の 1 径数部分群が得られるから，ここではすべての 1 径数部分群は周期が 4π である．これより $\mathrm{Ad}^{-1}(SU(2))$ は $SU(2)$ の 2 重被覆群のように見えるであろうが $SU(2)$ は 3 次元球面 S^3 と同相だから単連結である．

$\mathrm{Ad}^{-1}(SU(2))$ の元は振幅部分に ± の不定性を持つのだが量子論では状態関数の確率解釈を成立させるためにユニタリ表現されているものしか考えなかったので，このような "群" はこれまで量子論の中に現れなかったのである．

どのようになっているかを考えるには第 3 章末尾の曖昧束のイメージを使うとわかりやすい．$SU(2) = S^3$ を $S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ と考える．$SU(2)$ の中に $S^1 = \{e^{is}\}$ と同型な群が入っているからこれが自然に S^3 上の変換を引き起こすが，それは $(z_1, z_2) \to (e^{is}z_1, e^{is}z_2)$ で与えられる．したがってこの作用で複素数の比 z_1/z_2 は変わらないから，商空間 S^3/S^1 は $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ つまりリーマン球 S^2 と理解される．ファイバー束のイメージを使うと $S^3 = \coprod_{p\in S^2} S^1_p$ のように書かれる．

そこで，各ファイバー S^1_p の周期をそれぞれ倍にしたもの（S^1 の 2 重被覆）を $\tilde{S}^1_p$ として $\coprod_{p\in S^2} \tilde{S}^1_p$ を考えるのである．このようなものは集合としては考えられるものであるが多様体にはなっていない．なぜなら，もし $\coprod_{p\in S^2} \tilde{S}^1_p$ が多様体として定義されるならば，単連結である S^3 の連結な 2 重被覆空間が得られてしまうからである．

7.3　2 つの逆元と解析接続

(7.7) 式で uv に逆元が 2 つ見つかったのだが，uv は前章で出てきた例とは違って絶対可逆元ではない．しかしそれに近い性質があり，次が成り立つことが容易にわかる．z を $\mathbb{C}$ の複素座標関数とすると，

$$(uv-z)_+^{-1} = -i\int_0^{\infty} e_*^{\frac{it}{\hbar}(uv-z)}dt,\quad (uv-z)_-^{-1} = i\int_{-\infty}^{0} e_*^{\frac{it}{\hbar}(uv-z)}dt$$

はそれぞれ領域 $\{z; \mathrm{Im}z > -\hbar/2\}$, $\{z; \mathrm{Im}z < \hbar/2\}$ で正則である．だから，$*$-デルタ関数 $\delta_*(uv)$ は 2 つの正則関数の境界値の差として書かれる（[20] 参照）．これは**佐藤超関数** (hyper function) と呼ばれるものである．

7.3.1　半逆元（反逆的でなくなった）

5.3.2 項で出てきた半逆元も 2 つの逆元を使って説明できる．

命題 7.4　次の式が成立する：$v^\circ = u*(v*u)_+^{-1}$, $u^\bullet = (v*u)_+^{-1}*v$, $u^\circ =$

$u*(u*v)_-^{-1}$, $v^\bullet=(u*v)_-^{-1}*u$.

証明　次のように計算する：$u*(v*u)_+^{-1}=-i\int_0^\infty u*e_*^{itv*u}dt$ だから $u*e_*^{itv*u}$ をモイヤル積公式で計算し，変数変換で積分を計算すれば

$$v^\circ=-i\int_0^\infty\frac{4e^{\hbar t}}{(e^{\hbar t}+1)^2}ue^{\frac{2iuv}{\hbar}\tanh\frac{\hbar t}{2}}dt=\frac{1}{v}\big(1-e^{\frac{2i}{\hbar}uv}\big) \tag{7.33}$$

がわかる．他も同様である．（証明終わり）

$f(u)*\varpi_{00}=f(2u)\varpi_{00}$, $\varpi_{00}*f(u)=f(0)\varpi_{00}$ だったから，（割り算を使っているみたいで）よい書き方ではないが次のように書くこともできる：

$$u^\bullet=\frac{1}{u}(1-\frac{1}{2}\varpi_{00}),\quad u^\circ=\frac{1}{u}(1-\frac{1}{2}\bar{\varpi}_{00}).$$

7.3.2　解析接続

4.2.2 項で Spec(H) は H が属している代数を決めないと決まらないと述べたのだが，そのような例を述べよう．実は次のことがわかる（[31] 参照）．

定理 7.2　$(uv-z)_+^{-1}$ は領域 $\mathbb{C}-\{-\frac{i\hbar}{2}(2k-1);k=1,2,\cdots\}$ に解析接続され，$(uv-z)_-^{-1}$ は領域 $\mathbb{C}-\{\frac{i\hbar}{2}(2k-1);k=1,2,\cdots\}$ に解析接続される．しかも解析接続で得られる元はすべて $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の元である．

定理 7.2 は Spec(uv) は $\{-i\hbar(\mathbb{N}-1/2)\}$ に見えたり $\{i\hbar(\mathbb{N}-1/2)\}$ に見えたりするが，両方と見ると結合律が壊れるといっているのである．

不定元という見方をするならば，元 $\frac{1}{\hbar}uv$ は $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中で考える限り $\{-i(k-\frac{1}{2});k=1,2,\cdots\}$ を動く不定元とも $\{i(k-\frac{1}{2});k=1,2,\cdots\}$ を動く不定元とも思える．すると $\varepsilon_{00}=e_*^{\frac{\pi}{\hbar}uv}$ は $\pm i$ を動く不定元，$e_*^{\frac{2\pi}{\hbar}uv}$ は -1 を動く不定元（実は確定元）と考えられる．

定理 7.2 の証明の概略は次のようになる．

逆元 $(uv-z)_+^{-1}$ では当然 $(uv-z)_+^{-1}=e^{i\theta}(e^{i\theta}(uv-z))_+^{-1}$ といった恒等式が両辺が計算できる限り成立していると予想できるであろう．実際，この等式が $\mathrm{Re}\,(ie^{i\theta}z)\geq 0$, $e^{i\theta}\neq\pm i$ である限り成立することが，両辺を θ で微分し部分積分を使うと微分が 0 となることよりわかる．つまり，$-ie^{i\theta}\int_0^\infty e_*^{\frac{it}{\hbar}e^{i\theta}(uv-z)}dt$ は θ によらないのである．

これを使うと，$(uv-z)_+^{-1}$ は $\mathbb{C}-\{ix; x \le -\frac{1}{2}\hbar\}$ に自然に解析接続され，同様に $(uv-z)_-^{-1}$ は $\mathbb{C}-\{ix; x \ge \frac{1}{2}\hbar\}$ に自然に解析接続されていることがわかる．そこで次の補題を示すのである．

補題 7.5　$\rho \ne \frac{\hbar}{2}$ のとき，$\lambda = (\rho - \frac{\hbar}{2})^{-1}$ とおく．$(uv+\rho i)_+^{-1}$ が定義されているならば $v^\circ * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - \lambda i \varpi_{00}$ も定義され，これは $uv+\rho i - \hbar i$ の逆元を与える．この逆元は $(uv+\rho i-\hbar i)_+^{-1}$ が前もって積分を使って定義できているときにはそれと一致する．

証明　解析接続といっているのは $v^\circ * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - \lambda i\varpi_{00}$ をつくる手順を繰り返し使って逆元をつくり出す作業のことである．この作業で $(uv+\rho i-\hbar i)_+^{-1}$ がすでに定義されている場合には，球撞き補題 7.2 と ΨDO-型結合律を使って，

$$v^\circ * (uv+\rho i)_+^{-1} * v = (v^\circ * v) * (uv+\rho i-\hbar i)_+^{-1}$$

のようにおいてよい．したがって，

$$v^\circ * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - \lambda i\varpi_{00} = (1-\varpi_{00}) * (uv+\rho i-\hbar i)_+^{-1} - \lambda i\varpi_{00} \quad (7.34)$$

だが，$(uv) * \varpi_{00} = \varpi_{00} * (uv) = \frac{\hbar i}{2}\varpi_{00}$ に注意して計算すると

$$\varpi_{00} * (uv+\rho i-\hbar i)_+^{-1} = -\lambda i\varpi_{00}$$

がわかるから，(7.34) 式の左辺はちょうど $(uv+\rho i-\hbar i)_+^{-1}$ となる．

$\rho \ne \frac{\hbar}{2}$ で $(uv+\rho i)_+^{-1}$ が定義できており，$(uv+\rho i-\hbar i)_+^{-1}$ が定義できていない場合を考える．この場合でも

$$v^\circ * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - \lambda i\varpi_{00} = u * (v*u)_+^{-1} * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - i(\rho - \frac{\hbar}{2})^{-1}\varpi_{00}$$

は定義できる．実はこれが $uv+\rho i-\hbar i$ の逆元であることを示す．

$$\begin{aligned}(uv+\rho i-\hbar i)&*(v^\circ * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - \lambda i\varpi_{00})\\ &=(uv+\rho i-\hbar i) * u * (v*u)_+^{-1} * (uv+\rho i)_+^{-1} * v + \varpi_{00}\end{aligned}$$

であるが，$(uv+\rho i-\hbar i) * u = u * (uv+\rho i)$ だから

$$(uv+\rho i-\hbar i) * (v^\circ * (uv+\rho i)_+^{-1} * v - \lambda i\varpi_{00}) = u * (v*u)_+^{-1} * v + \varpi_{00} = 1$$

となる．同様の計算で $(v^\circ*(uv+\rho i)_+^{-1}*v-\lambda i\varpi_{00})*(uv+\rho i-\hbar i)=1$ がわかる．

すると，これまでに定義されている逆元と $\mathbb{C}[uv]$ とで生成される代数に，上のようにして定義された $(uv+\rho i-\hbar i)_+^{-1}$ を添加しても可換で結合的な代数が得られ，その代数に関して結合律が成り立つ．（証明終わり）

正規順序表示（(7.16) 式）では $\varepsilon_{00}=\sqrt{-1}e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}u\circ v}$ であった．しかし，多変数の場合正規順序表示では $\varepsilon_{00}^{(i)}*\varepsilon_{00}^{(j)}=-e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}(u_i\circ v_i+u_j\circ v_j)}$ と計算され不定性はないように見える．これは単位元から出る 1 径数部分群の元として計算するからで，$\varepsilon_{00}^{(i)}*\varepsilon_{00}^{(j)}=e_*^{\frac{t}{\hbar}u_iv_i}*\varepsilon_{00}(j)\big|_{t=\pm\pi}$ のように考えて計算したときには $\pm$ の不定性はつきまとう．また $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}u_iv_i}$ を $\pm i$ を動く不定元と考えたときには $\varepsilon_{00}^{(i)}*\varepsilon_{00}^{(j)}$ は $\{\pm i\}\times\{\pm i\}$ を動く不定元のように思わねばならない（joint spectra と呼ばれる）ようにも見えるが，$\varepsilon_{00}^{(i)}*\varepsilon_{00}^{(j)}=e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(u_iv_i+u_jv_j)}$ だから，$\mathrm{Spec}\frac{1}{\hbar}(u_iv_i+u_jv_j)$ は補題 7.5 と同様の証明で $\pi i\mathbb{N}$，または $-\pi i\mathbb{N}$ となり（自明ではない事柄），したがって $e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(u_iv_i+u_jv_j)}$ は $\{\pm 1\}$ を動く不定元のようにも考えられる．多変数の場合 Spec の考え方がいろいろあり得る．

7.3.3 いくつかの元の真空表現

$*$-指数関数，半逆元などを使って真空表現を考え次のことを示そう：

普通の微積分も，ある拡張されたワイル代数の真空表現と理解される．

これまでのことから以下の表の左の元が右のように表現されているのは明らかであろう．

u	$f(u)*\varpi_{00}\to u*f(u)*\varpi_{00}$
v	$f(u)*\varpi_{00}\to v*f(u)*\varpi_{00}=i\hbar\partial_u f(u)*\varpi_{00}$
ϖ_{00}	$f(u)*\varpi_{00}\to\varpi_{00}*f(u)*\varpi_{00}=f(0)*\varpi_{00}$

積分が入っていないと思うかもしれないが次のような式も得られる．

補題 7.6 任意の急減少関数 $f\in\mathcal{S}$ に対して

$$v^\circ*f*\varpi_{00}=\frac{1}{i\hbar}\int_0^u f(u)du*\varpi_{00},\quad u^\bullet*f*\varpi_{00}=\frac{1}{u}\big(f(u)-f(0)\big)*\varpi_{00}.$$

証明　$v^\circ * (f(u) * \varpi_{00}) = -i\int_0^\infty u * e_*^{itv*u} * (f(u) * \varpi_{00})dt$ であるから，まず $e_*^{itv*u} * (f(u) * \varpi_{00})$ を計算する．これは定義より

$$\frac{d}{dt}F_t = iv * u * F_t,\ \ F_0 = f(u) * \varpi_{00} \tag{7.35}$$

の実解析的解のことである．そこで結合律が成立すると思って計算してみると，交換則を使って $e_*^{itv*u} * f(u) = f(e^{-\hbar t}u) * e_*^{itv*u}$ である．さらに $e_*^{itv*u} * \varpi_{00}$ を考えるのだが，これも $\frac{d}{dt}G_t = iv * u * G_t, G_0 = \varpi_{00}$ の実解析的解のことであるから，$\frac{d}{dt}e^{-\hbar t}\varpi_{00} = iv * u * e^{-\hbar t}\varpi_{00}$ より $e_*^{itv*u} * \varpi_{00} = e^{-\hbar t}\varpi_{00}$ がわかる．これを使うと $e_*^{itv*u} * (f(u) * \varpi_{00}) = f(e^{-\hbar t}u) * e^{-\hbar t}\varpi_{00}$ が得られるが，右辺は (7.35) 式の実解析的解でもあるから両者は一致する．ゆえに

$$v^\circ * (f(u) * \varpi_{00}) = -i\int_0^\infty e^{-\hbar t}u * f(e^{-\hbar t}u) * \varpi_{00}dt.$$

$\tau = e^{-\hbar t}u$ と変数変換すれば

$$v^\circ * f(u) * \varpi_{00} = \frac{i}{\hbar}\int_u^0 f(\tau)d\tau * \varpi_{00} = \frac{1}{\hbar i}\int_0^u f(\tau)d\tau * \varpi_{00}$$

となるのである．同様の計算で

$$u^\bullet * f(u) * \varpi_{00} = \frac{1}{u}(f(u) - f(0)) * \varpi_{00}$$

がわかる．しかし，$v^\bullet, u^\circ$ などは真空表現をしてみると発散する．

結局 $\mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C})$ を含み，微分，積分，$e^{au+bv}(a, b \in \mathbb{C}), \varpi_{00}$ を含んだ結合代数が $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$ の中に含まれていることがわかる．　（証明終わり）

7.4　非解析解の混在する発展方程式

これまで扱った指数関数は exp（多項式）の形のものばかりであったが，この節で変数を実数に制限してもう少し一般の指数関数を扱う．生成元の変換をもう少し自由に考えようとすると一般の指数関数も必要になるからであるが，一般の指数関数では結合律があからさまに崩れることが多いのである．

この章で扱う例は**時間の一方向きには一意的に解けるのに，逆向きには一意性がない線形の発展方程式**の例であり，しかもこのようなものが $*$-指数関数として出てくる例である．この節での表示はすべてワイル順序表示である．

7.4.1　微分方程式にならない発展方程式

x, y を量子正準共役対とする拡張ワイル空間で，$\frac{d}{dt}f_t = (ie^{ay}{*}x) * f_t$ のような方程式を考えよう．$a > 0$ としている．この方程式の意味は後でわかる．$e^{ay}{*}x \in \mathcal{E}_{1+}(\mathbb{R}^2)$ だから，定理 5.7，定理 6.1 により $\bigcup_p \mathcal{E}_p(\mathbb{R}^2)$ 内で t に関して実解析的な解があれば，一意的であることに注意しておこう．

$[e^{ay}{*}x, \frac{1}{a}e^{-ay}] = \hbar i$ だから，$\mu^{-1} = \frac{1}{a\hbar i}e^{-ay}$, $\tau = e^{ay}{*}x$ とおけば μ^{-1}, τ は量子正準共役対 $[\mu^{-1}, \tau] = -1$ であり，$[\mu, \tau] = -\mu^2$ である．

x, y を実数に制限して考えたとき，$\overline{e^{ay} * x} = x * e^{ay}$ だから，$e^{ay} * x$ はエルミートではないが本質的なことではないから気にしなくてよい．この節では次の方程式　　　　（これはある意味で指数関数 e_*^{itu} を計算しているのである）

$$\frac{d}{dt}L_t = (ie^{ay}{*}x) * L_t \quad \left(\text{resp.} \quad \frac{d}{dt}R_t = R_t * (ie^{ay}{*}x)\right) \tag{7.36}$$

を扱う．L_t に関する方程式を左方程式，R_t に関する方程式を右方程式と呼ぶ．目標は次の定理である．

定理 7.3　(7.36) 式は $t \le 0$ (resp. $t \ge 0$) のときに多項式程度の増大度の「ほとんどすべての初期値」g に対して一意的解を持ち，それを $L_t(g)$ (resp.$R_{-t}(g)$) とすると，これが $t \le 0$ (resp. $t \ge 0$) で $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ の元となるが，$t > 0$ (resp. $t < 0$) のときには解は存在するが一意的でない（[32] 参照）．

「ほとんどすべての初期値」の内容は証明の中ではっきりする．証明のためには，まず $L_t(g) = F_t(x, y)$ とおき，$e^{ay} * f(x, y) = e^{ay}f(x + \frac{\hbar ia}{2}, y)$ に注意する．方程式 (7.36) はモイヤル積公式を使って書き直すと次のようになる：

$$\partial_t F_t(x, y) = ie^{ay}\Big\{\Big(x + \frac{\hbar ia}{2}\Big)F_t\Big(x + \frac{\hbar ia}{2}, y\Big) - \frac{\hbar i}{2}\partial_y F_t\Big(x + \frac{\hbar ia}{2}, y\Big)\Big\}.$$

初期条件を $F_0 = g(x, y)$ とする．$F_t(x, y) = G_t(x, y)e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ とおくと，

$$\partial_t G_t(x, y) = \frac{\hbar}{2}e^{2ay}\partial_y G_t\Big(x + \frac{\hbar ia}{2}, y\Big) \tag{7.37}$$

となるが，**これは微分方程式ではない**ことに注意する必要がある．これを初期条件 $G_0 = g(x, y)e^{\frac{2i}{\hbar}xy}$ で解きたいわけである．

x, y を実数に制限しているので $G_t(x + \frac{\hbar ia}{2}, y)$ のような書き方は意味がないように見えるかもしれないが，以下のように考えて意味を付ける．

ξ に関する緩増加シュワルツ (Schwartz) 超関数を使って

$$G_t(x,y) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t,\xi,y)e^{i\xi x}d\xi$$

つまり，$G_t(x,y)$ は C^∞ な緩増加シュワルツ超関数，この場合には $F_t(x,y)$ もそうなる

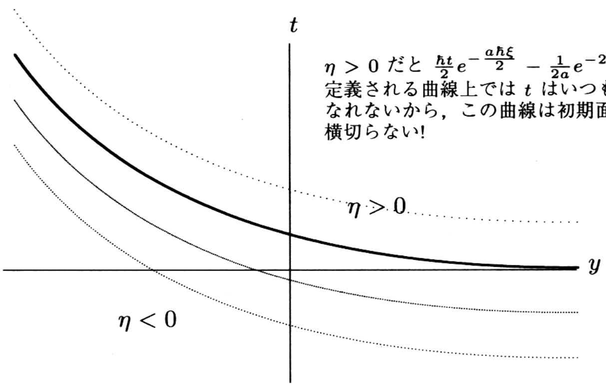
と書けているものとすれば，(7.37) 式は $a(t,\xi,y)$ に関する微分方程式

$$\left(e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}\partial_t - \frac{\hbar}{2}e^{2ay}\partial_y\right)a(t,\xi,y) = 0 \tag{7.38}$$

に変換される．これは ξ をパラメーターとする微分方程式だが，形を見れば，ベクトル場 $e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}\partial_t - \frac{\hbar}{2}e^{2ay}\partial_y$ に沿って $a(t,\xi,y)$ が一定というだけの，きわめてわかりやすい形になっている．このベクトル場の積分曲線を図示してみると概形は下の図のようになっていて，$\frac{\hbar t}{2}e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}} - \frac{1}{2a}e^{-2ay}$ はこのベクトル場に沿って一定である．したがって，(7.38) 式の解を書くには ξ を任意に固定して $t' = t - \frac{1}{a\hbar}e^{-2ay}e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}$，$y' = y$ という座標変換を考え，ベクトル場の座標変換公式を使って次のように計算する：

$$\partial_{t'} = \partial_t, \quad \partial_{y'} = -\frac{2}{\hbar}e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}e^{-2ay}\partial_t + \partial_y.$$

すると $\frac{\hbar}{2}e^{2ay}\partial_{y'} = -e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}\partial_t + \frac{\hbar}{2}e^{2ay}\partial_y$ だから，$a(t,\xi,y)$ を ξ を止めて (t',y') の関数と思ったときには解は y' を含まない任意の関数ということになる．これは ($\times\frac{\hbar}{2}e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}$ して) $\frac{\hbar t}{2}e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}} - \frac{1}{2a}e^{-2ay}$ の任意の関数といっても同じである．



これを超関数的に言い換えてやると，上の式は $a(t,\xi,y)$ を (t,y) ごとに超関数 $a(t,y)(\xi)$ が定まる超関数値関数と考えて，任意の試験関数 $\psi(\xi)$ に対して，

$$\int\left(\partial_t a(t,y)(\xi)e^{\frac{a\hbar\xi}{2}}\psi(\xi) - \frac{\hbar}{2}e^{2ay}\partial_y a(t,y)(\xi)\psi(\xi)\right)d\xi = 0$$

となる方程式だと考えられる．(7.38) 式の解は任意の，緩増加シュワルツ超関数 $\mathcal{S}'$ 値 C^∞-関数 $\varphi(y)(\xi)=\varphi(\xi,y)$ を使って

$$a(t,\xi,y)=\varphi\Big(\xi,\frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay}\Big) \tag{7.39}$$

のように求められるが，右辺は試験関数 $\psi(\xi)\in\mathcal{S}$ に対して

$$\int\varphi\Big(\xi,\frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay}\Big)\psi(\xi)d\xi$$

で定義する超関数であるから，φ は次の条件 ♣ も満たすものとする．

条件 ♣：$\varphi(\xi,\eta)$ は $\eta\to\varphi(\xi,\eta)$ と見たとき緩増加シュワルツ超関数 $\mathcal{S}'$ 値 C^∞-関数であって，$\forall(t,y)$ に対して $\varphi(\xi,\frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay})$ も緩増加シュワルツ超関数となる．

$\varphi(\xi,\eta)$ の超関数としての台が $\forall\eta$ で $\xi\geq C(>-\infty)$ に含まれていれば条件 ♣ を満たす．条件 ♣ を満たす関数のフーリエ像全体を $\mathcal{S}_{x,y}$ と書く．

$e^{\frac{ci}{\hbar}xy}=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(\xi-\frac{cy}{\hbar})e^{i\xi x}d\xi$ に注目すると，初期値 $g(x,y)$ が $e^{\frac{2i}{\hbar}xy},1,e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ のときには φ はそれぞれ次のものであることがわかる：

$$\varphi\Big(\xi,-\frac{1}{2a}e^{-2ay}\Big)=\delta\Big(\xi-\frac{4y}{\hbar}\Big),\quad \delta\Big(\xi-\frac{2y}{\hbar}\Big),\quad \delta(\xi) \tag{7.40}$$

しかし，$-\frac{1}{2a}e^{-2ay}<0$ だから，これでは φ は $\eta<0$ のところでしか決まらない．$\eta\geq 0$ のところは初期値 g では定まらないので任意に選んでよい．つまり (7.38) **式の解は初期条件だけでは決まらない**のである．しかし $\eta\geq 0$ のところで $\varphi=0$ とおけば (7.40) 式で与えた φ は条件 ♣ を満たすので，このような解のみを考えることも許される．これが実解析性を持った解である．

一般には $g(x,y)$ のフーリエ逆像を $\hat{g}(\xi,y)$ とすると，$g(x,y)e^{\frac{2i}{\hbar}xy}=G_0(x,y)$ の x に関するフーリエ逆像は

$$\psi(\xi,y)=\int\delta\Big(\xi'-\frac{2y}{\hbar}\Big)\hat{g}(\xi-\xi',y)d\xi'=\hat{g}\Big(\xi-\frac{2y}{\hbar},y\Big)$$

となるから，

$$\varphi\Big(\xi,-\frac{1}{2a}e^{-2ay}\Big)=\hat{g}\Big(\xi-\frac{2y}{\hbar},y\Big) \tag{7.41}$$

となる．したがって，初期条件が $G_0(x,y)=g(x,y)e^{\frac{2i}{\hbar}xy}$ のときには超関数 $\varphi(\xi,\eta)$ は次で与えられる：$\eta\leq 0$ のところでは，$-2a\eta=e^{-2ay}$ とおいて

$$\varphi(\xi,\eta)=\hat{g}\Big(\xi+\frac{1}{a\hbar}\log(-2a\eta),-\frac{1}{2a}\log(-2a\eta)\Big)$$

である．ただし $g=1$ のときには $\varphi(\xi,\eta)=\delta\left(\xi+\frac{1}{a\hbar}\log(-2a\eta)\right)$ である．$\eta>0$ のところではやはり任意である．

しかし，上の (7.40) 式のときと同様 $\eta>0$ に対しては $\varphi(\xi,\eta)=0$ とおいてしまうことができる．$G_t(x,y)$ が y について C^∞ とならないといけないから，

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi\Big(\xi,\frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay}\Big)e^{i\xi x}d\xi$$
$$=\int_{-\infty}^{\frac{2}{a\hbar}\log(a\hbar t)-\frac{1}{\hbar}4y}\varphi\Big(\xi,\frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay}\Big)e^{i\xi x}d\xi$$

が C^∞ という条件が付きそうに見えるだろうが，課されているのは t,y を固定したとき，緩増加超関数ということ，および t,y に関する C^∞-性であるから，これは自動的に満たされている．しかし実解析性までは保証されない．

これらをまとめると，初期条件 $F_0(x,y)=1$ のときには (7.38) 式の解は

$$\varphi\Big(\xi,\frac{\hbar t}{2}e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}-\frac{1}{2a}e^{-2ay}\Big)=\delta\Big(\xi+\frac{1}{a\hbar}\log(e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})\Big) \tag{7.42}$$

で与えられる．一般の初期条件 $F_0(x,y)=g(x,y)$ のときには

$$\hat{g}\Big(\xi+\frac{1}{a\hbar}\log\Big(e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\Big),-\frac{1}{2a}\log(e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})\Big) \tag{7.43}$$

である．これらは $t\le 0$ のときには左辺の φ は右辺で決まるのに対し，$t>0$ のときには $e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}<0$ となる (ξ,y) があるが，そういう場所の φ は初期関数 g では決まらないので，$G_t(x,y)$ が C^∞ となるような φ ならば勝手に選んでよい．$t>0$ では**左方程式の解には一意性がない**のである．

しかし $t\le 0$ ならば g によって解が一意的に定まるので，これを $L_t(g), t\le 0$ と書く．t に関する実解析性は g がかなり良い関数でないと保証されないが，一意性があるから $L_t(g)$ を $L_t(1)*g$ と書いてもよいであろう．$t\le 0$ ならば L_t は $\mathcal{S}_{x,y}$ から $\mathcal{S}_{x,y}$ への線形作用素となる．

$t>0$ のところでは左方程式の解が決まらないのは不便だから，何らかの方法で解を指定してしまおう．1 つの決め方は，$e^{2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}>0$ のところでは

$$\begin{aligned}&\varphi_0\Big(\xi,\frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay}\Big)\\&=\hat{g}\Big(\xi+\frac{1}{a\hbar}\log\left(e^{2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right),\ -\frac{1}{2a}\log(e^{2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})\Big)\end{aligned} \tag{7.44}$$

とおき $e^{2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}<0$ のところでは 0 としてしまうのである．このようにすれば，ともかく $t>0$ のところでも解は書ける．

このようにして決めた解を $\widetilde{L_t}(g), t\in\mathbb{R}$ と書くことにする．

(7.44) 式の <0 のところの設定は $\lim_{y\to\infty} g(\xi,y)=0$ ならば不要であろう．これより $\widetilde{L_t}(g)$ は $\forall g\in\mathcal{S}_{x,y}$ で定義されることがわかる．これが解であるということは，直接計算の検算で確かめることもできる．むろん $t\leq 0$ のときには $L_t(g)=\widetilde{L_t}(g)$ である．これで定理 7.3 の証明が完了した．

上で決めた $\widetilde{L_t}$ は $t>0$ のときには (7.44) 式の決め方より，$\widetilde{L_t}(g)=0$ より $g=0$ が出るようになっている．つまり，$\widetilde{L_t}:\mathcal{S}_{x,y}\to\mathcal{S}_{x,y}$ は $t\geq 0$ のところでは単射となるように定義されているのである．しかし，方程式の解というだけならこの他にもいろいろな取り方があり，一意性はない．

解の性質（初期値 1 の解）

とくに初期値 1 の (7.36) 式の解 $L_t(1)$ を $\widetilde{F}_t(x,y)$ とし，さらに $\widetilde{F}_t=\widetilde{G}_t e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ とすると，(7.42) 式より

$$\widetilde{F}_t(x,y)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta\left(\xi+\frac{1}{a\hbar}\log\left(e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right)\right)e^{i\xi x}d\xi e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$$

となるが，$t\leq 0$ の場合には，$\xi'=\xi+\frac{1}{a\hbar}\log\left(e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right)$ が可微分同相を与えるから，これで座標変換をすればもっと見やすくなるはずである．デルタ関数の性質から $\widetilde{G}_t(x,y)=e^{i\xi x}\frac{d\xi}{d\xi'}\Big|_{\xi'=0}$ だから，ここを計算し，x,y の関数として表示することを考えよう．

$$\frac{d\xi'}{d\xi}=1+\frac{1}{2}\frac{a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}}{e^{-2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}}$$

であり，$\xi'=0$ は $e^{-a\hbar\xi}+a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}=e^{-2ay}$ で与えられるが，これは $t\leq 0$, $t>0$ にかかわらず実解 $2e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}=-a\hbar t+\sqrt{(a\hbar t)^2+4e^{-2ay}}$ を持つから，右辺を $\psi(t,y)$ とおけば $\frac{d\xi'}{d\xi}\Big|_{\xi'=0}=\frac{\psi}{\psi+a\hbar t}$ だから

$$\widetilde{G}_t(x,y)=e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\psi}\frac{\psi}{\psi+a\hbar t},\quad \widetilde{F}_t(x,y)=\widetilde{G}_t(x,y)e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$$

が得られる．これらは (t,y) について実解析的であり，しかも，このようにしてつくった解は $t>0$ のところまで自然に延長可能である．また，これが $\forall t$ で解になっていることも次の式に注意すれば容易に確かめることができる：

$$\widetilde{G}_t\Big(x+\frac{a\hbar i}{2},y\Big)=e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\psi}\frac{\psi^2}{2(\psi+a\hbar t)},$$

$$\partial_t\psi=-a\hbar\frac{\psi}{\psi+a\hbar t},\quad \partial_y\psi=-4a\frac{e^{-2ay}}{\psi+a\hbar t}.$$

$\widetilde{F}_t(x,y)$ の構成のしかたより，これは実解析的だから次のこともわかる．

補題 7.7 $\forall s,t\in\mathbb{R}$ に対して次の指数法則が成立する：

$$\widetilde{F}_s(x,y)*\widetilde{F}_t(x,y)=\widetilde{F}_{s+t}(x,y).$$

$e_*^{ite^{ay}*x}=\widetilde{F}_t(x,y)$ はもっと詳しく書けば次のようになる：

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_t(x,y)&=e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}e^{ay}\psi}\frac{e^{ay}\psi}{e^{ay}\psi+e^{ay}a\hbar t},\\ e^{ay}\psi&=-a\hbar te^{ay}+\sqrt{(a\hbar te^{ay})^2+4}.\end{aligned}\tag{7.45}$$

この形から $\widetilde{F}_t(x,y)$ が $\mathcal{E}_{2+}(\mathbb{R}^2)$ の元であることもわかる．さらに，

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{ay}a\hbar t\right)^2+1}+\frac{1}{2}e^{ay}a\hbar t=\left(\sqrt{\left(\frac{1}{2}e^{ay}a\hbar t\right)^2+1}-\frac{1}{2}e^{ay}a\hbar t\right)^{-1},\tag{7.46}$$

$$\left(1-\frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\right)\left(1+\frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\right)=\frac{4}{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}$$

に注目してやれば，$e^{ay}\psi(-t,y)=a\hbar te^{ay}+\sqrt{(a\hbar te^{ay})^2+4}$ として，

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_{-t}(x,y)&=e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}e^{ay}\psi(-t,y)}\frac{e^{ay}\psi(-t,y)}{e^{ay}\psi(-t,y)-e^{ay}a\hbar t}\\ &=e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\left(e^{ay}a\hbar t+\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}\right)}\left(1+\frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\right)^{-1},\end{aligned}$$

$$\overline{\widetilde{F}_{-t}(x,y)}=\widetilde{F}_t(x,y)\left(\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}+e^{ay}a\hbar t\right)^2$$

となる．$e^{-2y}*x$ がエルミート元でないので $\widetilde{F}_t(x,y)$ がユニタリになっていないが，そうしたければ，$e^{ay}*x=e^{ay}(x+\frac{a\hbar i}{2})$, $x*e^{ay}=e^{ay}(x-\frac{a\hbar i}{2})$ だから $e^{ay}x=e^{ay}*(x-\frac{a\hbar i}{2})$ はエルミート元となることに注目して，x を $x-\frac{a\hbar i}{2}$ に置き換えて $\hat{F}_t(x,y)=e_*^{it(e^{ay}x)}$ を上と同じ考え方でつくればよい．同様の計算で解は，

$$\hat{F}_t(x,y)=e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}(-e^{ay}\hbar t+\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4})}\left(\frac{2}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\right)$$

となる．これは $\overline{\hat{F}_{-t}(x,y)} = \hat{F}_t(x,y)$ も満たすことが容易にわかる．

話をもとに戻して

$$\left[e^{ay} * x,\ e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\left(\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}-e^{ay}a\hbar t\right)}\left(1-\frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+4}}\right)\right]=0$$

も直接計算で確かめられる．これより，次のことがわかる．

命題 7.5 $e^{-\frac{2ix}{a\hbar}\log\frac{1}{2}\left(\sqrt{(e^{-2y}a\hbar t)^2+4}-e^{ay}a\hbar t\right)}\left(1-\frac{e^{ay}a\hbar t}{\sqrt{(e^{ay}a\hbar t)^2+1}}\right)$ は (7.36) 式の右方程式 $\frac{d}{dt}R_t(\tau) = R_t(\tau) * (ite^{ay}{*}x)$ の解でもある．

一方，$[\frac{1}{a}e^{-ay}, e^{ay}{*}x] = -\hbar i$ だったから，これらは量子正準共役で，これより次がわかる．

命題 7.6 $[\frac{1}{a\hbar}e^{-ay}, \widetilde{F}_s(x,y)] = s\widetilde{F}_s(x,y)$ である．つまり，$\widetilde{F}_s(x,y)$ は $\mathrm{ad}(\frac{1}{a\hbar}e^{-ay})$ の（固有値 s の）固有関数である．

証明 $t=0$ のとき $[e^{-ay}, \widetilde{F}_0(x,y)] = 0$ であり，微分してみると，

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Big[\frac{1}{a}e^{-ay},\ \widetilde{F}_t(x,y)\Big] &= \Big[\frac{1}{a}e^{-ay}, ie^{ay}{*}x{*}\widetilde{F}_t(x,y)\Big]\\ &= \hbar\widetilde{F}_t(x,y) + ie^{ay}{*}x{*}\Big[\frac{1}{a}e^{-ay},\ \widetilde{F}_t(x,y)\Big].\end{aligned}$$

$[\frac{1}{a}e^{-ay}, \widetilde{F}_t(x,y)] = \widetilde{F}_t(x,y){*}g_t$ とおいてこの形の解を探すと $\widetilde{F}_t(x,y){*}\frac{d}{dt}g_t = \hbar\widetilde{F}_t(x,y)$ だから，$\hbar t\widetilde{F}_t(x,y)$ は実解析的な解であることがわかる．しかし，このやり方ではこれ以外の解があるかもしれないので，次のように直接計算で確かめる：

$$[e^{-ay}, \widetilde{F}_t(x,y)] = e^{-ay}\Big(\widetilde{F}_t\Big(x-\frac{a\hbar i}{2}, y\Big) - \widetilde{F}_t\Big(x+\frac{a\hbar i}{2}, y\Big)\Big)$$

だから，(7.46) 式を使って計算すると結果が得られる．　　　　（証明終わり）

上の式を書き直すと $(e^{-ay} - a\hbar s) * \widetilde{F}_s = \widetilde{F}_s * e^{-ay}$ だが，これを使って注意深く計算すると次がわかる．

補題 7.8 $s \geq 0$ のときには次式が成立する：

$$\begin{aligned}\widetilde{F}_{-s}(x,y){*}(e^{-ay}{*}\widetilde{F}_s(x,y)) - a\hbar s &= \widetilde{F}_{-s}(x,y) * ((e^{-ay} - a\hbar s){*}\widetilde{F}_s(x,y))\\ &= \widetilde{F}_{-s}(x,y) * (\widetilde{F}_s(x,y){*}e^{-ay}) = e^{-ay}.\end{aligned}$$

証明　どうして $s \geq 0$ の条件が付くのか注意して読んでほしい．$\widetilde{F}_s \in \mathcal{E}_{2+}(\mathbb{C}^2)$, $e^{-ay} \in \mathcal{E}_{1+}(\mathbb{C}^2)$ だから，$\widetilde{F}_s(x,y) * e^{-ay}$ は定義できて，左方程式の初期値 e^{-ay} の解になっている．第 1 の等式は分配法則と指数法則より得られ，命題 7.6 より $\widetilde{F}_{-s}(x,y) * (\widetilde{F}_s(x,y) * e^{-ay})$ となるところまでわかる．問題は最後の等式 $\widetilde{F}_{-s}(x,y) * (\widetilde{F}_s(x,y) * e^{-ay}) = e^{-ay}$ の証明である．これは次の等式が示せれば十分である：

$$\widetilde{F}_t(x,y) * (\widetilde{F}_s(x,y) * e^{-ay}) = \widetilde{F}_{t+s}(x,y) * e^{-ay}.$$

$\widetilde{F}_t(x,y) * K$ は左方程式の初期関数 K の実解析的解として定義されているのだが，定理 7.3 より $t \leq 0$ では左方程式の解に一意性があるので，指数法則より $\widetilde{F}_t(x,y) * (\widetilde{F}_s(x,y) * g) = \widetilde{F}_{t+s}(x,y) * g$ が成立する．$t = -s$ とすればよい．

（証明終わり）

これはあぶない式で，結合律が成立するものとすると

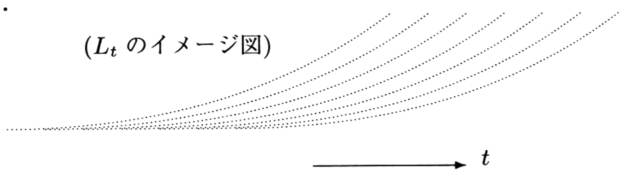
$$\widetilde{F}_{-s}(x,y)*(\widetilde{F}_s(x,y)*e^{-ay}) = e^{-ay}$$

の両辺に $\widetilde{F}_s, \widetilde{F}_{-s}$ を左右からかけて上の式が $s < 0$ まで成立すると

$$1 = (\widetilde{F}_{-s}*e^{ay}*\widetilde{F}_s) * (\widetilde{F}_{-s}*e^{-ay}*\widetilde{F}_s) = (\widetilde{F}_s*e^{ay}*\widetilde{F}_{-s}) * (e^{-ay} + a\hbar s)$$

となり，$e^{-ay} + a\hbar s$ が $s < 0$ についても可逆になってしまって矛盾となる．したがって，結合律が破れているのだが，それがどのように破れるのかを以下で詳しく調べる．

(L_t のイメージ図)



初期値 $e^{\frac{2i}{\hbar}xy}$, $e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ の解

この場合は (7.38) 式の解を与える φ は (7.40) 式よりそれぞれ

$$\varphi\Big(\xi, -\frac{1}{2a}e^{-2ay}\Big) = \delta\Big(\xi - \frac{4y}{\hbar}\Big),\ \delta(\xi)$$

であり，$\eta = -\frac{1}{2a}e^{-2ay}$ とおけば $\varphi(\xi,\eta) = \delta(\xi + \frac{2}{a\hbar}\log(-2a\eta))$, $\delta(\xi)$ である．したがって，時刻 t での解は第 1 のものは

$$\varphi\left(\xi, \frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi} - \frac{1}{2a}e^{-2ay}\right) = \delta\left(\xi + \frac{2}{a\hbar}\log\left(e^{-2ay} - a\hbar t e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right)\right)$$

であり，第 2 のものは $\delta(\xi)$ のままである．

第 1 のものは (7.42) 式に似ているが，分母が $a\hbar$ から $\frac{a\hbar}{2}$ に変わったために，$a\hbar t < -1$ だとつねに

$$\xi + \frac{2}{a\hbar}\log\left(e^{-2ay} - a\hbar t e^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\right) > 0$$

が成立する．デルタ関数の台は 0 のみだから前式の右辺は 0 となる．以上をまとめると，

定理 7.4 $\forall t \in \mathbb{R}$ で $L_t(e^{\frac{2i}{\hbar}xy})$, $L_t(e^{-\frac{2i}{\hbar}xy})$ は t について C^∞ な解として定義できる．しかも，$a\hbar t \leq -1$ のときには $L_t(e^{\frac{2i}{\hbar}xy}) = 0$ である．また $\forall t \in \mathbb{R}$ で $L_t(e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}) = e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ となる．

第 2 の式は方程式をベクトル場の式と考えて $(e^{-2y}{*}x) * e^{-\frac{2i}{\hbar}xy} = 0$ より当然予想されるのだが $\varphi(\xi, \eta) = \delta(\xi)$ となることから得られる．

7.4.2 結合律の破れる理由

上の考察はさらにさまざまなことを教えてくれる．$t \geq 0$ のとき，$L_{-t}(g)$ は定理 7.3 より g によって一意的に決まる．そこで g_t を初期値が g となる任意の解とすれば，$L_{-t}(g_t) = g$ が成立する．しかし，g_t はたくさんあり，左方程式は線形であるから $t > 0$ で L_{-t} は核（$L_{-t}(K) = 0$ となる元）を持つわけである．

$L_{-t}(K)$ は一般には t に関して実解析的ではないが，$t > 0$ で一意的なことを考えれば $t > 0$ では $L_{-t}(K) = L_{-t}(1){*}K$ と書いても（定義しても）よいであろう．ところが，$L_{-t}(1) = \widetilde{F}_{-t}$ であり，$\widetilde{F}_s$ については $\forall s \in \mathbb{R}$ について指数法則が成立していたから $\widetilde{F}_t\widetilde{F}_{-t} = 1$ であるが，$0 = \widetilde{F}_t(\widetilde{F}_{-t}{*}K) \neq K$ であるから，このようなところでは結合律は崩れている．さらに $t > 0$ では $\widetilde{F}_t{*}K$ は（発展方程式に一意性がないので）どう定義してよいかわからない（つまり，こういうところでも「積」というものを定義するべきなのかどうかわからない，何か別の考えを持ち込むほうがよいのではないかと考えてしまう場面である）．

補題 7.9 $L_{-t} : \mathcal{S}_{x,y} \to \mathcal{S}_{x,y}$ は $t > 0$ のときに非自明な核を持ち，さらに $L_{-t}\widetilde{L}_t = I$ となる．

$L_t, t<0$ の核

(7.45) 式を思い出す．(7.44) 式において初期関数 $\hat{g}(\xi,y)$ が，ある $t<0$ で

$$\begin{aligned}&\varphi\Big(\xi,\ \frac{\hbar t}{2}e^{-a\hbar\xi}-\frac{1}{2a}e^{-2ay}\Big)\\&=\hat{g}\Big(\xi+\frac{1}{a\hbar}\log\big(e^{2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}\big),-\frac{1}{2a}\log(e^{2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})\Big)=0\end{aligned} \tag{7.47}$$

を満たせば，$\hat{g}(\xi,y)$ に対応する初期関数を $G(x,y)=\int\hat{g}(\xi,y)e^{i\xi x}d\xi$ として，$K(x,y)=G(x,y)e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$ とおけば $L_t(K)=\widetilde{F}_t(x,y)*K=0$ となることがわかる．

そこで，このような $\hat{g}(\xi,y)$ を特徴づけよう．まず，$t<0$ は固定して，領域

$$E_t=\{(\xi+\frac{1}{\hbar}\mu,-\frac{1}{2}\mu);\ \mu=\frac{1}{a}\log(e^{2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}}),\xi,y\in\mathbb{R}\}$$

を決定しよう．$\mathrm{supp}\,\hat{g}$ が E_t の補集合内にあれば $\hat{g}$ は上の条件 (7.47) を満たす．

上の $\mu=\frac{1}{a}\log(e^{2ay}-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})$ は e^{2ay} が任意の正値をとるから，$t<0$ を固定したとき，ξ ごとに $\mu>\log(-a\hbar te^{-\frac{a\hbar\xi}{2}})$ の範囲を動く．これより

$$E_t=\{(\xi,\eta);\eta<\frac{\hbar}{2}\xi-\frac{1}{a}\log(-a\hbar t)\}$$

であることがわかる．$D_t=E_t^c$ 内に台を持つ条件 ♣ を満たす超関数であれば，これは条件 (7.47) を満たす．

とくに，各 η に対して，ξ に関して緩増加超関数でなければならない．この場合，D_t の性質から $\xi>0$ の方向には台が有限でなければならない．$0\geq t>t'$ のとき，$D_t\subset D_{t'}$ は明らかであろう．初期関数 $\hat{g}(\xi,y)$ が時刻 $t<0$ の $\widetilde{L}_t(g)$ に影響を与えるのは $(\xi,y)\in E_t$ の部分だけである．

命題 7.7　$\hat{g}(\xi,y)$ について，$\mathrm{supp}\,\hat{g}\subset D_t,\ t<0$ ならば

$$G(x,y)=\int\hat{g}(\xi,y)e^{i\xi x}d\xi,\quad K(x,y)=G(x,y)e^{-\frac{2i}{\hbar}xy}$$

とおけば $L_t(K)=\widetilde{F}_t(x,y)*K=0$ となる．

7.4.3　ハイゼンベルグ代数の表現

ワイル代数では $\hbar$ は数扱いされているのだが，ハイゼンベルグ代数ではこれも代数の元である．したがって，前節で述べた擬微分作用素による表現では正

規順序であれワイル順序であれハイゼンベルグ代数は表現されない．ハイゼンベルグ代数の表現を得るには $\hbar$ も作用素として表現しなければならないのである．しかもそれがやはり真空表現の形に見えるように表現したいのである．そこで何か $\mathrm{ad}(\tilde{\hbar})$ のようなものを考え，これの固有値 $\hbar$ の固有空間として表現空間が得られるようにしたいわけである．この項でこの問題を考える．

接触ワイル代数とその拡張

そのために接触代数と呼ばれるものを構成しなければならないのだが，定義の部分だけは多変数でやってしまおう．$(2n+1)$-変数のハイゼンベルグ代数 H^{2n+1} は (2.19) 式の関係式で定義されていて $2n$-変数のワイル代数 W^{2n} の $\hbar i$ の部分を変数 μ と思い直したものである．**接触ワイル代数**とはもう 1 つの変数 τ を

$$[\tau, u_i] = \mu{*}u_i, \quad [\tau, v_j] = \mu{*}v_j, \quad [\tau, \mu] = 2\mu^2, \quad 1 \leq i, j \leq n$$

という交換関係で H^{2n+1} に添加した代数 $H^{2n+1}[\tau]$ のことで $\mathcal{C}^{2n+2}$ と書く．H^{2n+1} は $\mathcal{C}^{2n+2}$ の中の μ と可換な元の全体である．

> ヤコビ代数の定義 3.2 を見直せば，接触ワイル代数は接触代数を量子化した概念だということがわかるだろう．

この代数を超越関数がたくさん考えられるところまで拡張するために少し手前から準備をする．$u_1, \cdots, u_n, v_1, \cdots, v_n$ を $\mathbb{R}^{2n}$ の座標関数とし，これまでと同様 $(\mathcal{E}_2(\mathbb{R}^{2n}); *)$ を考える．$\hbar$ を $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ を動く変数と考える．さらに $\mathcal{E}_2(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}_+)$ を $\mathbb{R}_+$ から $\mathcal{E}_2(\mathbb{R}^{2n})$ への C^∞-写像の全体とする．積の構造は各 $t \in \mathbb{R}_+$ ごとの $*$-積として入れる．$\mathcal{E}_2(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}_+)$ において，

$$\begin{aligned}\Phi_t : &(u_1,\, v_1,\, u_2,\, v_2, \cdots, u_n,\, v_n, \hbar)\\ &\to (e^{2t}u_1,\, v_1 - ct,\, e^t u_2,\, e^t v_2, \cdots, e^t u_n,\, e^t v_n, e^{2t}\hbar)\end{aligned}$$

で定義される変換を考える．これは $\hbar$ を不変にはしていないが 1 径数同型群である．1 径数同型群としては上のようなものだけでなくいろいろ考えられるが，前の話とつなげるために上のものを選んでいる．

次に $c \neq 0$ として，$\mathcal{E}_2(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}_+)$ の中で次のようにおく：$(2 \leq i \leq n)$

$$\tau = \frac{ci}{\hbar}u_1,\ \tilde{\hbar} = \hbar e^{\frac{2}{c}v_1},\ \tilde{u}_i = e^{\frac{1}{c}v_1} * u_i,\ \tilde{v}_i = e^{\frac{1}{c}v_1} * v_i. \tag{7.48}$$

すると，$\tau, \tilde{\hbar}, \tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ は Φ_t-不変な元であり，容易な計算で

$$[\tau, \tilde{\hbar}] = 2\tilde{\hbar},\ [\tau, \tilde{u}_i] = \tilde{u}_i,\ [\tau, \tilde{v}_i] = \tilde{v}_i,\ [\tilde{u}_i, \tilde{v}_j] = -i\tilde{\hbar}\delta_{ij},\ [\tilde{\hbar}, \tilde{u}_i] = [\tilde{\hbar}, \tilde{v}_i] = 0$$

がわかる．τ の代わりに $\tilde{\tau} = \tilde{\hbar}{*}\tau$ を使って上の式を書き直せば，

$$\begin{aligned}[\tilde{\tau}, \tilde{\hbar}] =& 2\tilde{\hbar}^2, \quad [\tilde{\tau}, \tilde{u}_i] = \tilde{\hbar} * \tilde{u}_i, \quad [\tilde{\tau}, \tilde{v}_i] = \tilde{\hbar} * \tilde{v}_i, \\ [\tilde{u}_i, \tilde{v}_i] =& -i\tilde{\hbar}\delta_{ij}, \quad [\tilde{\hbar}, \tilde{u}_i] = [\tilde{\hbar}, \tilde{v}_i] = 0, \quad (2 \le i \le n)\end{aligned} \tag{7.49}$$

である．第 4 章の μ-制御代数の言葉で述べると，$\tilde{\hbar}, \tilde{\tau}, \tilde{u}_i, \tilde{v}_i$ で $\mathcal{E}_2(\mathbb{R}^{2n} \times \mathbb{R}_+)$ の中で生成される結合代数 $\mathcal{O}$ が $\tilde{\hbar}$-制御代数になっており，もとのハイゼンベルグ代数は $\tilde{\hbar}$ と可換な $\mathcal{O}$ の元全体として $\mathcal{O}$ の中に入っている．

$\hbar$ はこれらの元から生成される代数の外側の元だが，すべての元と可換であることにかわりはないから，このような代数を構成して後で $\hbar =$ 定数とおくことは問題ない．$\mathrm{ad}(\hbar^{-1})$ のつくる特性ベクトル場は ∂_τ で与えられる．

しかし，$\mathrm{ad}(\tilde{\hbar})$ の固有空間として $\hbar =$ 定数とおいた空間が現れるようにしようとすると，$*$-指数関数 $e_*^{s\tilde{\tau}} = e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau} = e_*^{isc(e^{\frac{2}{c}v_1} * u_1)}$ を使う必要が出てくるのである．これを前節で行なったのである．

$[(2\tilde{\hbar})^{-1}, \tilde{\hbar} * \tau] = 1$ だから，指数関数 $e_*^{isc(e^{\frac{2}{c}v_1} * u_1)}$ が定義できれば，命題 7.6 より $[c(2\tilde{\hbar})^{-1}, e_*^{s\tilde{\hbar}*\tau}] = cse_*^{s\tilde{\hbar}*\tau}$ もわかる．真空にあたるものとしては，

$$\tilde{\varpi} = 2e^{\frac{2i}{\nu}u_1 v_1} * 2e^{\frac{2i}{\nu}u_2 v_2} * \cdots * 2e^{\frac{2i}{\nu}u_n v_n} = 2^n e^{\frac{2i}{\nu}(u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n)}$$

をとるのである．$\tilde{\varpi} * \tilde{\varpi} = \tilde{\varpi}$ は明らかである．$c = 2\hbar$ としてやると $\frac{1}{c}(2\tilde{\hbar}) * \tilde{\varpi} = e^{\frac{2}{c}v_1} * \tilde{\varpi} = \tilde{\varpi}$ となり，これより

$$\frac{1}{c}2\tilde{\hbar} * e_*^{\frac{s}{c}\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi} = \frac{1}{s+1} e_*^{\frac{s}{c}\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi} \tag{7.50}$$

が得られる．前節で示したように $s \le -1$ のときには $e_*^{\frac{s}{c}\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi} = 0$ となるので，$\frac{1}{s+1} > 0$ としてよい．表現空間をつくるには，$s > -1$ ごとに空間

$$\mathcal{E}_\infty(\mathbb{R}^{2n}) * e_*^{\frac{s}{c}\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi} \tag{7.51}$$

を考え，この線形空間を点 s の上のファイバーと見て $(-1, \infty)$ 上のベクトル束 $\coprod_{s>-1} \mathcal{E}_\infty(\mathbb{R}^{2n}) * e_*^{\frac{s}{c}\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi}$ をつくる．これの連続切断全体の線形空間

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{\Gamma}\Big(\coprod_{s>-1} \mathcal{E}_\infty(\mathbb{R}^{2n}) * e_*^{\frac{s}{c}\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi}\Big)$$

を表現空間とするのである．上のベクトル束はこの表現空間の固有空間分解だと考えるわけである．

> s の上のファイバーは $e_*^{\frac{s}{c}\tilde{\hbar}*\tau} * \tilde{\varpi}$ の部分を無視して，$\hbar = \frac{1}{s+1}$ とするような拡張されたワイル代数の空間 $\mathcal{E}_\infty(\mathbb{R}^{2n})$ と思ってよい．

$\boldsymbol{E}$ の元 f は連続切断と見ているときには $f = f(\cdot)$ と書かれるが，$f(s)$ そのものもベクトル空間 $\boldsymbol{E}$ の元と思うときには点 s にのみ台を持つデルタ関数を用いて $f(s)\delta_s$ のように書かれる．したがって $f = \int_{-1}^{\infty} f(s)\delta_s ds$ だが，関数解析では $\delta_s ds$ を dE_s と書く習慣があるので，

$$f = \int f(s)dE_s \tag{7.52}$$

のように書く．これを $2\hbar(2\tilde{\hbar})^{-1}$ **のスペクトルによる $\boldsymbol{E}$ の分解**と呼ぶ．

注意 7.1　この節の話は後で述べる局所化定理によって局所的に代数を標準化してワイル代数をつくり，それをもとにして接触ワイル代数を構成して，代数の表現をつくるときに使われる．このとき τ が大域的に定義できるか，$e^{i\tau}$ が大域的に定義できるかで問題がかなり違ってくる．

第 8 章　シュレーディンガー的世界

シュレーディンガーの流儀で量子力学を考えるには配位空間 N をまず考えその上の微分作用素環 $Diff(N)$ を考えるのだが，これは古典的には相空間 T_N^* の（p_i に関する）多項式環を考えることに対応する．しかし古典力学では多項式のみ扱っているのではなくもっと自由に T_N^* 上の関数を扱っている．そうすると量子化された世界でもそれに相当することができなければいけないわけである．この目標のためにこの章で N 上の擬微分作用素環を定義する．そのためにはまず共変微分を持ち出さないといけない．

> 配位空間とはわれわれが肉体的に住むことのできる空間，実際に物が置かれている空間のことである．しかし配位空間という概念は数学的には**無定義**である．強いて言えば古典的相空間を余接束 T_N^* に限定することが「配位空間としての N を考える」ということらしい．

N は n-次元パラコンパクト C^∞-リーマン多様体，$C^\infty(N)$ は C^∞-関数の全体とする．この章では関数の値は複素数だが変数はすべて実数に制限されていて，複素変数は使われていない．

8.1 計量接続，測地座標系

微分法の定義のしかた

> 接続係数の与え方はたくさんある．つまり，微分のしかたがたくさんある．

接続係数は一定の座標変換公式さえ満たしていればかなり自由に設定できるものであったから，計量接続の定義の復習から始める．

N を n-次元 C^∞-リーマン多様体，またはローレンツ多様体とする．接続 ∇ が与えられたとき，簡単な計算で

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

は $C^\infty(N)$-線形性を持つことがわかる．つまり T は $(1,2)$-歪対称テンソルである．これを接続 ∇ の**捩率** (torsion) **テンソル**という．$x^1,\cdots,x^n$ を局所座標系とする局所座標表示は $\nabla_{\partial_{x^i}}\partial_{x^k} = \Gamma^k_{ij}\partial_{x^k}$ として

$$T(X,Y) = T^k_{ij}X^iY^j\partial_{x^k}, \quad T^k_{ij} = \Gamma^k_{ij} - \Gamma^k_{ji}$$

となる．計量を与え，捩率テンソルを与えると接続係数 Γ^k_{il} は計量を不変にするという条件で決まってしまうのでそれを見ておこう．$g^{ij}g_{jk} = \delta^i_k$ でこれは定数だから，$\nabla_i dx^k = -\Gamma^k_{ia}dx^a$ を使って

$$\begin{aligned}
0 &= \nabla_i(g_{jl}g^{lk}) = \nabla_i(g_{jl}dx^l \circ dx^k) \\
&= g_{jl,i}g^{lk} - g_{jl}(\Gamma^l_{ia}dx^a \circ dx^k + \Gamma^k_{ia}dx^l \circ dx^a) \\
&= g_{jl,i}g^{lk} - g_{jl}(\Gamma^l_{ia}g^{ak} + \Gamma^k_{ia}g^{la}) \\
&= g_{jl,i}g^{lk} - g_{jl}\Gamma^l_{ia}g^{ak} - \Gamma^k_{ij}.
\end{aligned}$$

ここで，$dx^l \circ dx^k$ は内積 $\langle dx^l, dx^k\rangle$ のことであるが，後で，クリフォード (Clifford) 代数の積からつくった対称積とも思うのでこのように書いている．両辺に g_{km} をかけて k で和をとり，添字を付け変えると

$$g_{jm,i} = g_{ja}\Gamma^a_{im} + g_{ma}\Gamma^a_{ij} \tag{8.1}$$

となるから，$[j;im] = g_{ja}\Gamma^a_{im}$，$T_{j;im} = g_{ja}T^a_{im}$ という記号を導入すると，$[j;im] = [j;mi] + T_{j;im}$ であり，$g_{jk,i} = [j;ik] + [k;ij]$ となる．添字を巡回的

に回して次のように計算する．

$$
\begin{array}{rlr}
g_{jk,i} = [j;ik] + [k;ij] & & (+ \\
g_{ki,j} = [k;ji] + [i;jk] & & (+ \\
g_{ij,k} = [i;kj] + [j;ki] & & (- \\
\hline
g_{jk,i} + g_{ki,j} - g_{ij,k} = 2[k;ij] - T_{k;ij} - T_{j;ki} + T_{i;jk} & &
\end{array}
$$

$\tau^k_{ij} = \frac{1}{2} g^{ka}\left(T_{a;ij} + T_{j;ai} - T_{i;ja}\right)$ とし，(2.17) 式で定義したクリストッフェル記号を思い出すと接続の係数 Γ^k_{ij} は

$$
\Gamma^k_{ij} = \left\{ {k \atop ij} \right\} + \tau^k_{ij}, \qquad \tau^k_{ij} = \frac{1}{2} T^k_{ij} \tag{8.2}
$$

のように求められる．この接続を（torsion つきの）**計量接続**と呼ぶ．あまり支持されていないが，捩率テンソルの部分に電磁場のような物理的意味を考えようという動きが昔からある．

これを局所座標系によらない形で書けば $\forall \omega \in \mathcal{F}^{(1)}_M$, $\forall X \in \mathcal{X}(M)$ に対して $\nabla_X \omega$ が $\mathcal{F}^{(1)}_M$ の元となるように与えられたことを意味する．

これが与えられれば，自然に $\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ に対しても $\nabla_X Y$ が決められる．つまり $\nabla_{\partial_{x^i}} \partial_{x_j} = \Gamma^k_{ij}(x) \partial_{x_k} = \left\{ {k \atop ij} \right\} \partial_{x_k} + \tau^k_{ij} \partial_{x_k}$ とするのである．共変微分の計算のしかたは第 2 章で与えてあるのでもう一度見直してもらいたい．

8.1.1　測地座標系による微分作用素の表示

共変微分と似ている微分法として，測地座標系による微分法を与える．この微分法は微分幾何の教科書にはあまり触れられていないが，解析学を学んだ人が多様体上で考えるときに便利なものである．2.2.3 項で与えた測地線の定義より，捩率テンソルがある場合にも (8.2) 式を使って

$$
\frac{d^2}{dt^2} x^i + \Gamma^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0, \quad i = 1, \cdots, n \quad \text{（アインシュタイン記法）}
$$

で与えられる．$\tau^i_{jk} \frac{dx^j}{dt} \frac{dx^k}{dt} = 0$ に注意すると，**測地線というのは捩率テンソルには無関係**（物理的にいえば相互作用がないということ）であることがわかる．

N 上には計量接続を与えておく．N の計量接続による指数写像を $\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}}$: $T_{\boldsymbol{x}} N \to N$ とする．これは C^∞-級の写像であり，$T_{\boldsymbol{x}} N$ の原点の近傍から N に

おける $\boldsymbol{x}$ の近傍の上への可微分同相となる．$T_{\boldsymbol{x}}N$ の元を $\boldsymbol{X} = \sum X^i \partial_{x^i}$ のように表示して，$T_{\boldsymbol{x}}N$ と $\mathbb{R}^n$ を $\boldsymbol{X} \Leftrightarrow (X^1, \cdots, X^n)$ で同一視する．

補題 8.1　点 $p \in N$ を原点とする測地座標系 $x^1, \cdots, x^n$ でクリストッフェル記号を書くと $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}(0) = 0$ である．さらに計量テンソル $g_{ij}(\boldsymbol{x})$ を原点でテイラー展開すると $g_{ij}(\boldsymbol{x}) = g_{ij}(0) +$（2 次式以上）となる．

証明　測地座標系の定義のしかた（2.2.3 項参照）を思い出せば，測地座標系 $x^1, \cdots, x^n$ を使って $(x^1(t), \cdots, x^n(t)) = (a^1 t, \cdots, a^n t)$ のように表される原点を通る直線は測地線である．つまり，測地線の方程式を満たす．すると $\frac{d^2}{dt^2} x^i(t) = 0$ だから任意の $(a^1, \cdots, a^n)$ で $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}(t\boldsymbol{a}) a^j a^k = 0$ となる．とくに $t = 0$ のところでは，$\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}(0) = 0$ がわかる．これとクリストッフェル記号の定義式 (2.17) より後半がわかる（(8.1) 式参照）．　　（証明終わり）

測地座標系を使う微分法の考え方を説明しよう．

局所座標系の場

> 測地座標系とは多様体 N の各点 p ごとの，そこを原点とする局所座標系で，いわば「局所座標系の場」，「動く座標系」なのである．

多様体 N 上に定義された量で「点 $q \in N$ における値」という述べ方が意味を持っているような量は結局局所座標系を用いて表されるから，点 q ごとにそこを原点とする測地座標系で表される．すると，表されたものは $\mathbb{R}^n$ の原点の近傍で定義された関数の組でしかないから，微分を考えるときには「点 q での微分（高階でもよい）を考えるときにはいつも点 q を原点とする測地座標系で行なう」と約束してしまえば，これで多様体上で意味のある微分法になるわけである．この考え方は高階微分を定義するところまでは楽であるが，点 q での微分と別の点 q' での微分との関係を書くのが難しい．この欠点はあるが微分作用素を多様体上で定義するときにきわめて便利である．

すべての線形微分作用素は

$$
(D_{(j)}f)(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(\boldsymbol{x})(\partial_{\boldsymbol{X}}^\alpha f(\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{X}))(0)
$$

$$
\begin{aligned}
(Df)(\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=0}^{k} (D_{(j)}f)(\boldsymbol{x}), \\
(D_{(j)}f)(\boldsymbol{x}) &= \sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(\boldsymbol{x})(\partial_{\boldsymbol{X}}^\alpha f(\mathrm{Exp}_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{X}))(0)
\end{aligned}
\tag{8.3}
$$

のように書かれる．この書き方での係数 $a_\alpha(\boldsymbol{x})$ は局所座標系に依存しているが，$a_\alpha(\boldsymbol{x})$, $|\alpha| = j$ は $(j, 0)$-対称テンソルとして変換される．つまり

$$
\sum_{|\alpha|=j} a_\alpha(\boldsymbol{x})\partial_{\boldsymbol{X}}{}^\alpha = \sum_{i_1,\cdots,i_j} a^{i_1\cdots i_j}(\boldsymbol{x})\partial_{X^{i_1}}\cdots\partial_{X^{i_j}}
$$

のように多重添字をやめて書き直してやるとこれが座標変換に耐えて N 上で意味を持つのである．(8.3) 式を微分作用素 D の**対称テンソル表示**と呼ぶ．

この書き方は次節の擬微分作用素の定義でも使われるが，この場合には指数写像が可微分同相を与えている最大範囲（**単射半径** (injectivity radius) と呼ばれる）に注意して，この範囲内に収まるように適切な cut off 関数をかけないといけない．単射半径は点 p ごとに > 0 であり，下から連続であるから N 上で正値連続な関数で下から押えられる．

測地座標系による微分法と共変微分との関係は階数の低いところでは簡単であるが高階のところまできれいに書く方法は知られていない．また測地座標系による微分作用素の合成の公式も精密には書かれていない．

8.1.2　多様体上の擬微分作用素

2.2.3 項で測地座標系を解説したが，ここではそれを使って，配位空間としての多様体 N を固定してその上に擬微分作用素を定義する．以下この項では N は**コンパクトで境界なしの C^∞-リーマン多様体**で，計量テンソルを $h_{ij}dx^i dx^j$，体積要素を $d\mu(y)$ とし，全体積は $\int 1 d\mu(y) = 1$ としておく．

積分核で与える作用素

最初に行列のイメージで考えやすい積分核で与える作用素を考える．N 上の L_2（2 乗可積分）-関数全体のなすヒルベルト空間を E^0 とする．$f, g \in C^\infty(N)$ に対してエルミート内積を $\langle f, g\rangle_0 = \int_N f\bar{g}d\mu$ で与える．

$N\times N$ 上の "関数" $K(x,y)$ に対して $f \to K\circ f$ という写像

$$
(K\circ f)(x) = \int_N K(x,y)f(y)d\mu(y)
$$

$f(y)$ を縦ベクトル，(x, y) が行，列の添字に対応しているのだが，あまりこれに頼ると危険である．

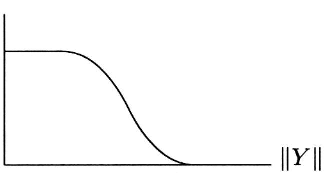
で，これが $C^\infty(N)$ から $C^\infty(N)$ への線形写像となっているものを考える．$K(x,y) \in C^\infty(N \times N)$ ならば $K\circ$ は $C^\infty(N)$ から $C^\infty(N)$ への線形写像を定義することは明らかだが，少々の特異性があっても y について積分してしまうときに打ち消されてしまうことが考えられる．$K \in C^\infty(N\times N)$ のときには $f \in L_2(N)$ でありさえすれば $(K\circ f) \in C^\infty(N)$ となるので，微分作用素の感覚では $-\infty$ 階の作用素である．このようなものを**平滑作用素** (smoothing operator) と呼んでおく．

そこで対角線集合を $\triangle = \{(x,x) \in N\times N; x \in N\}$ と定義して，$N\times N - \triangle$ では C^∞ だが $\triangle$ のところには特異点を持ってもよいようなものを考える．たとえば $K(x,y) = \delta_x(y)$ （$y = x$ のところでのみ値を持つデルタ関数）とする．これは超関数だが，これを使うと $\int_N \delta_x(y)f(y)d\mu(y) = f(x)$ だから $K\circ$ は恒等写像（単位行列）となる．また $K\circ$ の双対作用素 $K^*\circ$ を $\langle K^*\circ f, g\rangle_0 = \langle f, K\circ g\rangle_0$ で定義しておく．$K^*(x,y) = \bar{K}(y,x)$ である．

真空表現

微分作用素環のところで真空と呼んでいたのは $\xi_i * \varpi_N = 0$ を満たすもののことであったが，ここでは**真空**なるものを $K\circ 1\varpi_N = \int_N K(x,y)d\mu(y)\varpi_N$ と定義する．つまり $K(x,y) * f(y) * \varpi_N = (K\circ f) * \varpi_N$ とおくのである．

そこで $\psi(x,y)$ を対角線集合 $\triangle$ の近傍では恒等的に 1 となりもう少し大きい近傍の外側では恒等的に 0 となる非負値 C^∞-関数とする．さらに $\psi(x,y) > 0$ となる範囲は各 x で x の単射半径内であるとしよう．つまりこの範囲内にある y は $y = \mathrm{Exp}_x Y,\ Y \in T_xN$ のように一意的に書かれているとする．$\phi(x;Y) = \psi(x, \mathrm{Exp}_x Y)$ とすると，左のようなグラフとなる関数で，こういうものを



cut off 関数と呼んでいる．さらに $\lambda > 0$ を大きくとって $\phi_\lambda\ (x;Y) = \phi(x;\lambda Y)$ とし，$\phi_\lambda\ (x;Y)\phi(x;Y) = \phi_\lambda(x;Y)$ が成立するようにし，固定する．さらに関数 $\psi_\lambda(x,y)$ を $\psi_\lambda(x, \mathrm{Exp}_x Y) = \phi_\lambda(x,Y)$ で定義して $K(x,y)$ を

$$K(x,y) = \phi_\lambda(x,Y)K(x,\mathrm{Exp}_x Y) + ((1-\psi_\lambda)K)(x,y) \tag{8.4}$$

のように分解する．すると $((1-\psi_\lambda)K)(x,y)$ は C^∞-関数であり，平滑作用素

となる．そこで (8.4) 式の右辺の最初の項が超関数のフーリエ変換を使って

$$\phi_\lambda(x,Y)K(x,\mathrm{Exp}_x Y)\frac{dy}{dY} = \int a(x,\hbar\xi)e^{i\langle\xi,Y\rangle}d\!\!\bar{}\,\xi \tag{8.5}$$

のように書かれているものとする．$\frac{dy}{dY}$ は y 変数を Y 変数に変えるときに付いてくる変数変換のヤコビ行列式である．この場合，$a(x,\hbar\xi)$ を与えて K を決めていると考えるのだが，左辺は高々 $Y=0$ のところに特異点があるのみで台 (support) はコンパクトだから Y^α をかければかけるほど質（たち）がよくなる（微分可能に近くなる）関数である．したがって，こういうものがフーリエ変換で出てくるためには $a(x,\xi)$ のほうは ξ で微分すればするほど質のよくなる（可積分に近くなる）関数でなければならない．これは $a(x,\hbar\xi)$ が ξ に関しては多項式に似た性質の関数でなければならないことを意味する．

$$\begin{aligned}&\int \psi_\lambda(x,y)K(x,y)f(y)dy\\ &\quad= \int \phi_\lambda(x,Y)K(x,\mathrm{Exp}_x Y)\phi(x,Y)f(\mathrm{Exp}_x Y)\frac{dy}{dY}d\!\!\bar{}\,Y\end{aligned}$$

だから，

$$(\psi_\lambda K)\circ f(x) = \iint a(x,\xi)e^{i\langle\xi,Y\rangle}\phi(x,Y)f(\mathrm{Exp}_x Y)d\!\!\bar{}\,\xi d\!\!\bar{}\,Y$$

となる．これは形式的には次のように書いてもよい：

$$(\psi_\lambda K)*f*\varpi_N = \int a(x,\xi)e^{i\langle\xi,Y(y)\rangle}d\!\!\bar{}\,\xi * \psi(x,y)f(y)*\varpi_N.$$

超関数のフーリエ変換をすると普通の意味では関数として扱えなかったものまで普通の関数のように扱えることが大切なところで，$a(x,\xi)$ は ξ について多項式程度の増大度の関数とする．

8.2　ヘルマンダー型擬微分作用素

N をコンパクトで境界なしの C^∞-リーマン多様体とする．詳しい定義は後にまわすが $a(x,\xi)$ を ξ について多項式程度の増大度の関数とし，$a(x,\xi)$ を**表象**とする N 上の擬微分作用素 $P_\phi(a)$ を次のように定義する：（$\hbar$ は正定数，または形式的変数として）

$$(P_\phi(a)f)(x) = \int_{T_x^*N}\int_{T_xN} a(x,\hbar\xi)e^{i\langle\xi,X\rangle}\phi(x,X)f(\mathrm{Exp}_x X)d\!\!\bar{}\,X d\!\!\bar{}\,\xi. \tag{8.6}$$

上の式の読み方を解説しよう．x を任意に固定して，指数写像 $\mathrm{Exp}_x : T_xN \to N$ を考える．$f(\mathrm{Exp}_x X)$ は N 上の関数 f を点 x を中心とする測地座標系で表示して接空間 T_xN 上の関数と見たということである．$\phi(x,X)$ は $\|X\|$ が 0 に近いところでは 1 で，少し大きくなると 0 となる関数だが，$\phi(x,X)$ の X に関する台は x ごとに指数写像の単射半径に入っているものとしている．

$F(x)(X) = \phi(x,X)f(\mathrm{Exp}_x X)$ は T_xN 上の，台がコンパクトな関数となる．これをまずフーリエ変換して x をパラメーターとして含む ξ の関数 $\mathcal{F}(F(x))(\xi)$ と見る．急減少関数のフーリエ変換は急減少関数だが，($F(x)$ の台がコンパクトだったから) ξ に関しては正則関数で ξ を実軸に制限したときに急減少の関数になっている．

次にこれに ξ に関して多項式増大度の関数 $a(x;\hbar\xi)$ をかけているが，こうしても ξ に関して急減少の関数であることに変わりはない．最後にこれをフーリエ逆変換してやると T_xN 上の関数になるが，x での値に注目するので，0 での値を見ているのである．これは y で積分したことに対応する．

命題 8.1　$P_\phi(a)$ の定義は cut off 関数 ϕ に依存しているが，$a(x,\xi)$ が ξ の多項式のときには ϕ に無関係に微分作用素となる．一般には ϕ を別の cut off 関数 ϕ' に替えても差 $P_\phi(a) - P_{\phi'}(a)$ は平滑作用素である．

証明　$a(x,\xi)$ は余接束 T_N^* 上の関数であるが，ここでは局所座標変換が ξ に関しては線形変換であることから $a(x,\xi)$ が ξ に関して r-次の多項式である $(r = 0,1,2,\cdots)$ ということが意味を持つ．$a(x,\xi)$ が多項式 $\sum_\alpha a_\alpha(x)\xi^\alpha$ のときには部分積分で ξ^α を $(iD)_X^\alpha(\phi(x,X)f(\mathrm{Exp}_x X))$ に替えることができるが，積分すると結局 $X=0$ の値のみ取り出すことになる．ところが $\phi(x,X)$ のほうは $X=0$ の近傍で恒等的に 1 だから $(iD)_X^\alpha f(\mathrm{Exp}_x X)|_{X=0}$ が出るのみである．これは関数 f を測地座標系を使って微分したということである．

x を任意に固定して $\delta\phi(x,X) = \phi(x,X) - \phi'(x,X)$ とすると，a を先に与えて $P_\phi(a)$, $P_{\phi'}(a)$ を決めたのだから

$$((P_\phi(a) - P_{\phi'}(a))f)(x) = \iint a(x,\hbar\xi)e^{i\langle\xi,X\rangle}\delta\phi(x,X)f(\mathrm{Exp}_x X)\,đX\,đ\xi$$

であるが，$\delta\phi(x,X)$ は $X=0$ の近傍では恒等的に 0 となる関数である．ところが $F(x;X) = \int a(x,\xi)e^{i\langle\xi,X\rangle}đ\xi$ は $X=0$ のところにのみ特異点を持つのだから $F(x;X)\delta\phi(x,X)$ は C^∞-関数となり，平滑作用素となる．（証明終わり）

積公式

擬微分作用素は上のように多様体上で簡単に定義できるが，
合成を書くときにはかなりの注意が要る．

8.2.1 多様体上のワイル型擬微分作用素

ヘルマンダー型の擬微分作用素 $P_\phi(a)$ は一般に $P_\phi(a)^* \neq P_\phi(\bar{a})$ なので，作用素のエルミート性と表象の実性が一致しないという使い勝手の悪さがある．そこでこれを改良して**ワイル型擬微分作用素**と呼ばれる $W_\phi(a)^* = W_\phi(\bar{a})$ を満たす作用素をつくっておく．ヘルマンダー型の擬微分作用素でも $P_\phi(a)^*$ は再び擬微分作用素になることはわかっているのだから $W_\phi(a) = \frac{1}{2}(P_\phi(a) + P_\phi(a)^*)$ と定義してしまえばおしまいのように見えるだろうが，定義式をよく見るとワイル型擬微分作用素のほうは x, ξ が平等に扱われているため $N = \mathbb{R}^n$ のような非コンパクトな多様体でもうまく使える定義になっているのである．また μ-制御代数の見方からするとワイル型擬微分作用素はヘルマンダー型の擬微分作用素でつくる μ-制御代数のフィルタリングを変更しているだけであることがわかる．

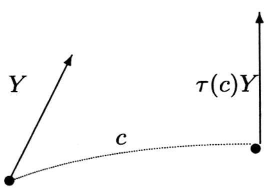
ワイル型の擬微分作用素を定義するために次のような記号を使う：

$\phi(x,y)$	:	$\phi(x,y) = \phi(y,x)$ を満たす cut off 関数
$q = q(x;y)$	:	$y = \mathrm{Exp}_x q$ を q について解いたもの
$\frac{\overline{xy}}{2}$	:	x, y を最短測地線で結んだときの中点
$\tau(\frac{\overrightarrow{xy}}{2})Y$	:	最短測地線に沿った x から $\frac{\overline{xy}}{2}$ までの Y の平行移動

ワイル型の擬微分作用素 $W_\phi(a)$ は次のように定義される：

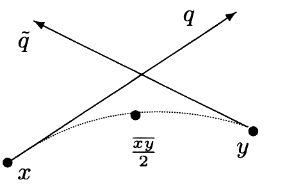
$$(W_\phi(a)f)(x) = os\text{-}\iint a\left(\frac{\overline{xy}}{2}; \hbar\xi\right) \phi(x,y) e^{-i\langle \xi, \tau(\frac{\overrightarrow{xy}}{2}) q\rangle} f(y) \text{đ}y \text{đ}\xi. \qquad (8.7)$$

この式の読み方は (8.6) 式のところで解説したのと同じである．$W_\phi(a)^* = W_\phi(\bar{a})$ を示すための式変形には接続に関する平行移動の知識が少し要る．



一般に曲線 $c(t)$ に沿う Y の平行移動を $\tau(c)Y$ と書く．平行移動とは曲線に沿っての共変微分が 0 となるような $Y(t)$ を，Y を初期条件として解くということだから，接続が計量接続ならば $\langle \tau(c)X, \tau(c)Y\rangle_{c(1)} = \langle X, Y\rangle_{c(0)}$，つまり平

行移動は内積を変えない．また y が x の単射半径内ならば $y = \mathrm{Exp}_x q(x, y)$ と



なる q が一意的に定まるのは明らかであろう．$\tilde{q} = \tau(\overrightarrow{xy})(-q)$ を x, y を結ぶ最短測地線に沿う $-q$ の平行移動とすれば $x = \mathrm{Exp}_y \tilde{q}$ となることは測地座標系の定義を考えれば明らかであろう．$\tau(\frac{\overrightarrow{xy}}{2})\tau(\overrightarrow{xy})^{-1} = \tau(\frac{\overrightarrow{yx}}{2})$ も容易であろう．これらを使って，$W_\phi(a)^* = W_\phi(\bar{a})$ がわかる．つまり，作用素としてエルミートということと，表象が実数値関数ということが同じになるのである．

注意 8.1　ヘルマンダー型であれ，ワイル型であれ定義式は $\hbar$ が形式的変数であってもそのまま使える．このようにしてみると (4.5) 式のようなものに自然に意味が付くことがわかる．

8.2.2　作用素の階数

前節の擬微分作用素は $C^\infty(N)$ から $C^\infty(N)$ への作用素として定義されている．しかし，擬微分作用素にも微分階数にあたる**階数** (order) という概念がある．これは大まかにいって微分可能性をどれだけ変化させるかを表すものだが，定義するためには多様体 N 上の関数全体を**滑らかさ**を基準にして

$$\boldsymbol{E} \subset \cdots \subset E^k \subset \cdots \subset E^1 \subset E^0 \subset E^{-1} \subset \cdots \subset E^{-k} \subset \cdots \subset \boldsymbol{E}^* \tag{8.8}$$

といった関数空間の列に並べて考える必要がある．$\boldsymbol{E}$ は考えている作用素の族に共通の定義域，$\boldsymbol{E}^*$ はその双対空間である．そのために**制御子**と呼ばれる作用素を滑らかさの基準として使うのである．N 上の関数を考えるときには制御子としては普通ラプラシアン (Laplacian) と呼ばれる微分作用素 $\Delta = P_\phi(r^2)$ を使って，$T = 1 + \Delta$ をとる．$r^2 = h^{ij}\xi_i\xi_j$ であり，

$$(\Delta f)(x) = -\sum_{i,j} h^{ij}(x)\partial_{X^i}\partial_{X^j} f(\mathrm{Exp}_x X) = -\sum_{i,j} h^{ij}(x)(\nabla_i \nabla_j f)(x)$$

である．

注意 8.2　これまでの“真空” ϖ_N の使い方では $\sum_{i,j} h^{ij}(x)\xi_i\xi_j * \varpi_N = 0$ だから，$(1 + r^2) * \varpi_N = \varpi_N$ である．

内積の定義を思い出し部分積分を使えば次のことは容易であろう．

補題 8.2　$\forall f \in C^\infty(N)$ に対して $\langle (1+\Delta)f, g\rangle_0 = \langle f, (1+\Delta)g\rangle_0$ が成立し，かつ正の定数 c があって，$\langle (1+\Delta)f, f\rangle_0 \geq c\|f\|_0$ が成立する．

ノルムを調節しておけば $c=1$ と思っていてよい．次のことが知られている．

定理 8.1　（フリードリスク (Friedricks) の拡張定理）　$T = 1+\Delta$ は E^0 の稠密な部分空間 D_T で定義された自己共役作用素に拡張される．これも同じ記号 T で書くことにする．

D_T 上にエルミート内積 $\langle\, ,\,\rangle_1$ を $\langle f, g\rangle_1 = \langle Tf, g\rangle_0$ によって持ち込み，E^1 をこれより決まるノルム位相で D_T を完備化したものとする．E^1 はヒルベルト空間であり，明らかに E^0 の中に稠密に埋め込まれており，その包含写像は連続である．さらに T^{-1} が自然に $T^{-1}: E^0 \to E^1$ なる線形等長写像に拡張できることも明らかであろう．$E^{2k} = (T^{-1})^k E^0$ とし，位相や内積は E^0 から T^{-k} を通してそのまま持ち込んだヒルベルト空間とする．

E^{-1} を内積 $\langle\, ,\,\rangle_0$ に関する E^1 の双対空間とする．$E^1 \subset E^0$ だから，$E^0 \subset E^{-1}$ で埋め込み写像は連続である．$\forall f \in E^1$ に対して線形写像 $g \to \langle g, f\rangle_1$ は E^{-1} の元となるからこの写像を $J: E^1 \to E^{-1}$ と書く．これは単射連続線形写像となるがヒルベルト空間論のはじめに教わる**リース** (Riesz) **の定理**を使うと実は全射であることもわかり，さらに**閉グラフ定理**を使うと $J: E^1 \to E^{-1}$ は位相線形同型でなければならないことがわかる．これで E^{-1} もヒルベルト空間になるのだが，実は J は T の拡張になっているのでこれも同じ記号で書く．そこで $E^{2k-1} = T^{-k}E^{-1}$ と定義する．

E^k の双対空間を E^{-k} と書けば T^k は E^k から E^{-k} の上への位相線形同型となる．これより E^{-k} もヒルベルト空間にできる．

このようにして T から (8.8) 式のようなヒルベルト空間の列が得られる．包含写像はすべて連続であり T は $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して E^k から E^{k-2} の上への線形等長写像に拡張される．

$\tilde{\boldsymbol{E}} = \bigcap_k E^k$ とし逆極限位相を入れる．一般的にいえるのは $\boldsymbol{E} \subset \tilde{\boldsymbol{E}}$ までであるがこの場合は N を境界なしのコンパクト多様体としているので $\tilde{\boldsymbol{E}} = C^\infty(N)$ が成立する．$\{\tilde{\boldsymbol{E}}, E^k, k \in \mathbb{Z}\}$ を一般に E^0 と T で定義された**両側-ILH-鎖**と呼ぶが，多様体上の関数で定義されている場合，**両側-ソボレフ-鎖**と呼ぶ．この鎖を使って作用素の**階数** (order) という概念が定義される．

このへんの定義は解析的にやりすぎかもしれない，量子論が数学的にできあがったときには，多分あまり重要なものではなくなるのだが，いまはそれをいうのは早すぎるであろう．

定義 8.1 作用素 $A : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ が $\forall k \in \mathbb{Z}$ で E^k から E^{k-m} への連続写像に拡張できるとき **m-階の作用素** $(m \in \mathbb{Z})$ と呼ぶ．$\forall m$ について $-m$-階の作用素となる作用素を **$-\infty$-階の作用素**と呼ぶ．さらに，(k と無関係の) 正定数 C と，k ごとに決まる正定数 D_k があって $\forall f \in \boldsymbol{E}$ に対して次の不等式が成立するものを m-階の**正規 ILH-写像**と呼ぶ：

$$\|Af\|_{k-m} \leq C\|f\|_k + D_k\|f\|_{k-1}, \quad \forall k \in \mathbb{Z}.$$

定数 C が k に依存していないことが大切である．0-階の正規 ILH-写像全体はきわめて扱いやすい性質があり，次のことが成り立つ（[22],§I.4 参照)．

命題 8.2 0-階の正規 ILH-写像全体は開可逆な σ-フレシェ代数をなす．

次の命題はソボレフの補題と呼ばれているものと同じである．

命題 8.3 点 $x \in N$ を台とするデルタ関数 δ_x は E^{-s_0}, $s_0 = [\frac{1}{2}\dim N] + 1$ に含まれており，$x \to \delta_x$ は N から $E^{-s_0-\ell}$ への埋め込み写像と見て C^ℓ-級写像である．

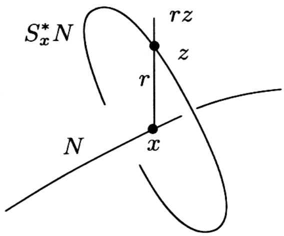
$\forall f \in E^{s_0+\ell}$ は $E^{-s_0-\ell}$ 上の線形連続関数（したがって C^∞-関数）だから $f(x) = \langle f, \delta_x \rangle$ により N 上の C^ℓ-関数と思える．

命題 8.4 階数 $-\infty$ の作用素は平滑作用素であり，逆も成立する．

証明 T が $-\infty$ 階の作用素ならば $(T\delta_x)(z)$ は (x, z) について C^∞ である．T の連続性より $\int_N (T\delta_x)(z) f(z) d\mu(z) = T((\int_N \delta_x)(z) f(z) d\mu(z))$ となるが，右辺は Tf である．逆に $K \in C^\infty(N \times N)$ のときには $\forall x$ を固定して $K(x, \cdot)$ を $E^{-s_0-\ell}$ 上の線形連続関数と思えるから $\int_N K(x,y) f(y) d\mu(y) = \langle K(x, \ ), f \rangle_0$ は定義できる．（証明終わり）

8.2.3 多様体 N 上の表象族

擬微分作用素とは k-階以下の "微分作用素" をフーリエ変換を使って考えられるようにしたものである．とくに 6.4.1 項でやったようにヘルマンダー型のものは変数 x については何も条件が付かないから，x の動く範囲をコンパクト集合に制限して考えることができる．また，本当の微分がまったく入ってこない，「0-階以下」の擬微分作用素の全体は加法および合成による積の演算で閉じ，位相もうまく定義できて**擬微分作用素環**と呼ばれる σ-フレシェ代数になる．



これが，μ を形式的変数としない場合の，典型的な μ-制御代数となるのであるが，これを見るにはもう少し $a(x,\xi)$ の属する関数空間について知る必要がある．S_N^* を N の単位余接球束とし，$x \in N$ におけるファイバーを S_x^*N とする．$T_N^* - \{0\}$ は $\mathbb{R}_+ \times S_N^*$ と可微分同相である，ただし $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R};\, t > 0\}$ である．$T_N^* - \{0\}$ の点は $z \in S_x^*N$ として $(x; rz)$ のように表示できる．T_N^* 上の C^∞-関数 $f(x;p)$ が**漸近次数** $\leq m$ であるとは任意の自然数 $s \geq -m$ に対して S_N^* 上の C^∞-関数 $a_m, a_{m-1}, \ldots, a_{-s}$ を選んで $T_N^* - \{0\text{-切断}\}$ 上で次の不等式が成立する場合をいう（おもに $m \leq 0$ の場合を想定している）：

$$r^{s+1}\left|f(x;rz) - a_m(x;z)r^m - a_{m-1}(x;z)r^{m-1} - \cdots - a_{-s}r^{-s}\right| \leq C_s \text{（有界）}.$$

f が漸近次数が $\leq m$ の関数であることを次のように書く：

$$f(x;rz) \sim a_m(x;z)r^m + a_{m-1}(x;z)r^{m-1} + \cdots + a_{-s}r^{-s} + \cdots, \tag{8.9}$$

これを f の**漸近展開**という．これは $r = \infty$ でのテイラー展開と考えてよい．

$\Sigma^m(T_N^*)$ を漸近次数が $\leq m$ である T_N^* 上の関数全体とする．$\Sigma^\infty(T_N^*) = \bigcup \Sigma^m(T_N^*)$ を**古典的表象族**と呼ぶ．$\Sigma^{-\infty}(T_N^*) = \bigcap \Sigma^m(T_N^*)$ とおく．$\Sigma^m(T_q^*)$ を $q \in N$ を止めて ξ についてだけ上のような漸近展開を持つ関数全体とし，ベクトル束 $\coprod_{q\in N} \Sigma^m(T_q^*)$ を考えればこれの C^∞-切断の全体が $\Sigma^m(T_N^*)$ である．

命題 8.4 と合わせて実は次が成立するのである．

定理 8.2 $a(x;\xi) \in \Sigma^m(T_N^*)$ のとき $P_\phi(a), W_\phi(a)$ は階数 m の正規 ILH-作用素である．階数 $-\infty$ の作用素は平滑作用素であり，逆も成立する．

おおまかにいって $\Sigma^m(T_N^*)$ の元は ξ で微分すればするほど質のよくなる関数である.

定理 8.3 $a(x;\xi) \in \Sigma^p(T_N^*)$, $b(x;\xi) \in \Sigma^q(T_N^*)$ のとき作用素の合成 $P_\phi(a)P_\phi(b)$ に対し $c \in \Sigma^{p+q}(T_N^*)$ が $P_\phi(a)P_\phi(b) = P_\phi(c)+$（平滑作用素）となるように定まる. c の漸近展開は a, b の漸近展開から一意的に定まる. これは, $W_\phi(a)$, $W_\phi(b)$ に対してもまったく同様である.

これをもとにすると, 次もわかる.

系 8.1 正定値自己共役作用素 $S : \boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E}$ で $S^2 = 1 + \Delta$ となるものが $\sqrt{1+r^2}$ を表象とする擬微分作用素として定まる.

しかし平滑作用素にも注意を払って擬微分作用素を考えるときには $\Sigma^m(T_N^*)$ の元だけを考えていては足りないので核表示に戻って考える. $N\times N - \triangle$（対角線集合）上で C^∞-関数 $F(x,y)$ が $F(x, \mathrm{Exp}_x Y)$ を $Y=0$ の近傍に cut off して Y についてフーリエ変換すると, 漸近次数 $\leq m$ の関数に漸近展開されるとき, F を**古典的表象の核表示**という. こういうものの全体を $F \in \Sigma^m(N\times N)$ と書く. 平滑作用素に注意して擬微分作用素を考えるときにはこちらの表示が適している.

$\Sigma^m(N\times N)/\Sigma^{m-1}(N\times N) = \Sigma^m(T_N^*)/\Sigma^{m-1}(T_N^*) = \boldsymbol{\Gamma}(1_{S_N^*})r^m$ であり, 漸近展開に 0 しか現れない関数のフーリエ変換像は C^∞-関数になるから $\bigcap_{m\leq 0} \Sigma^m(N\times N) = C^\infty(N\times N)$ である.

$$\Sigma^m(N\times N) = \boldsymbol{\Gamma}(1_{S_N^*})r^m \oplus \Sigma^{m-1}(N\times N) \quad (\boldsymbol{\Gamma}(1_{S_N^*}) = C^\infty(S_N^*)),$$

$$\Sigma^0(N\times N)/\Sigma^{-\infty}(N\times N) = \boldsymbol{\Gamma}(1_{S_N^*}) \oplus \mu\boldsymbol{\Gamma}(1_{S_N^*}) \oplus \mu^2\boldsymbol{\Gamma}(1_{S_N^*}) \oplus \cdots$$

である. 普通の可換積に関して $\Sigma^r(T_N^*)\Sigma^s(T_N^*) \subset \Sigma^{r+s}(T_N^*)$ となることは自明であろう. これより $\Sigma^0(T_N^*)/\Sigma^{-\infty}(T_N^*)$ は普通の積で可換代数であり, 余接束に自然に誘導されるポアソン括弧積 $\{\ ,\ \}$ でも閉じることがわかる.

次の定理は階数 0 の擬微分作用素環が μ-制御代数の最も基本的な例であることを示しているが, 4.3 節の定義と違って係数体が複素数体になっていることに注意してもらいたい.

定理 8.4　$\mu = i\sqrt{1+r^2}^{-1}$ とする．$\mathcal{O} = \Sigma^0(N\times N)$ は擬微分作用素の積に関して μ-制御代数であり，σ-フレシェ代数としては開可逆である．B としては $C^\infty(S_N^*)$ をとることができ，ξ_0 は S_N^* の接ベクトル場として定義され，$\{\,,\,\}$ は S_N^* 上の実数値関数を保つ双微分（双ベクトル場）として定義される．

この場合，$\Sigma^0(N\times N)$ に入れる位相は $\forall k \in \mathbb{N}$ で，$\mu^k * \mathcal{O}$ が閉部分空間に見えるように入れるのである．N 上で考えている限りヘルマンダー型の擬微分作用素とワイル型のそれとは表象に作用素を対応させるときの対応のさせ方が違うだけであるが，これは第 4 章で述べたフィルタリングの変更を行なっているのだと解釈できる．B のとり方，位相の入れ方を注意として以下で説明する．

注意 8.3　漸近展開を考えれば

$$\Sigma^0(N\times N) = \boldsymbol{\Gamma}(1_{S_N^*}) \oplus \cdots \oplus \mu^k * \boldsymbol{\Gamma}(1_{S_N^*}) \oplus \mu^{k+1} * \Sigma^0(N\times N) \tag{8.10}$$

のように書かれるが，k を十分大きくとれば $\mu^{k+1} * \Sigma^0(N\times N)$ の元は $|\xi| \to \infty$ での増大度がかなりゆるくなってしまうから核表示したとき $C^{k-\frac{n}{2}-1}$-関数が得られる．そこで分解 (8.10) を使って k ごとに $\bigoplus_{i=0}^k \mu^i * C^\infty(S_N^*)$ には $C^\infty(S_N^*)$ の C^∞-位相の直積位相，$\mu^{k+1} * \Sigma^0(N\times N)$ には $C^{k-\frac{n}{2}-1}$ 位相を入れ，k を動かして射影極限位相を入れるのである．

代数優先の見方

擬微分作用素環という代数が先にあって，これを具体的に表示するために表象とか，$\Sigma^0(N\times N)$ の元を使って作用素として表現しているのだと考えるのである．

定理 8.4 をもとにして 4.3.2 項の命題 4.2 のようにしてヤコビ代数をつくることができる．これを $(C^\infty(S_N^*), \xi_0, \{\,,\,\})$ と書く．しかしここでは複素数値関数が使われていることに注意しておく．

ξ_0 や $\{\,,\,\}$ は積公式の最初の 2 項を具体的に書かないといけないので計算は省くが，次のことがわかる．

定理 8.5　$(C^\infty(S_N^*), \xi_0, \{\,,\,\})$ は 3.3.1 項で述べた S_N^* 上の ω を接触形式とする接触代数である．

$\forall\, f \in C^\infty(S_N^*)$ に対し $\mathrm{ad}(\frac{1}{\mu} f)$ は (4.12) 式より $(\mathcal{O}; *)$ の微分だが $(C^\infty(S_N^*); \cdot)$

の微分（接ベクトル場）$X_f^{(0)} : B \to B$ をも誘導する．これについて次がわかる．

系 8.2 $\Sigma^1(T_N^*)/\Sigma^0(T_N^*)$ は S_N^* 上の無限小接触変換全体 $\boldsymbol{\Gamma}_\omega(T_{S_N^*})$ のなすリー環と同型である．

さらに補題 3.3 の証明の部分を見れば，$T_N^* - \{0\}$ に自然に入るポアソン括弧積を $rf, f \in C^\infty(S_N^*)$ の形の元に制限して $(C^\infty(S_N^*), \xi_0, \{\ ,\ \})$ が得られているので，次のこともわかる．

補題 8.3 $(C^\infty(S_N^*), \xi_0, \{\ ,\ \})$ から補題 4.5 のやりかたでポアソン代数 $C^\infty(S_N^*)\ [r, r^{-1}]$ をつくれば $T_N^* - \{0\}$ に自然に入るシンプレクティック代数となる．

$\forall f \in \Sigma^1(T_N^*)$ は T_N^* 上にハミルトン・ベクトル場 X_f を定義しているが，係数は複素数値だから接ベクトル場を定義するようにするには f の漸近展開の初項が純虚数値であればよい．このようなものの全体を $\Sigma^1_{\mathbb{R}}(T_N^*)$ とする．

3.3.1 項でも述べたように T_N^* は D_N^* と各ファイバーを保つ写像で C^∞-同相であるから，これを使って X_f を D_N^* 上のベクトル場に移すことができる．移されたものを $\tilde{u}_f$ と書くと次がわかる．

命題 8.5 $\tilde{u}_f$ は D_N^* の閉包上にまで C^∞-ベクトル場として拡張される．しかも拡張されたベクトル場は境界上では境界多様体 S_N^* に接している．結果として $\forall f \in \Sigma^1_{\mathbb{R}}(T_N^*)$ について X_f は T_N^* 上で完備なベクトル場である．

8.2.4 完備性と自己共役性の関係

第 2 章で与えたニュートン力学のハミルトン関数は T_N^* 上の 2 次の多項式であり，相対論的ハミルトン関数は r が十分大きいところでは漸近展開して 1 次以下の次の形に書かれていたことを思い出してほしい：

$$a_1(x)r + a_0(x) + a_{-1}(x)r^{-1} + \cdots + a_{-s}(x)r^{-s} + a_{-s-1}(x; r)r^{-s-1}.$$

r^{-1} と $\mu = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}$ の違いは $r^{-1} = \mu\frac{1}{\sqrt{1-\mu^2}} = \mu(1 + \frac{1}{2}\mu^2 + \cdots)$ として漸近展開に組み込めるので本質的には何の違いも生まない．μ-制御代数の μ はかなり自由に置き換えられるのである．

$\mathcal{O} = \Sigma^0(T_N^*)$ とすると，$B = C^\infty(S_N^*)$ であり，$\mathrm{ad}(\mu^{-1} {*} a) : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ は微分で $\mathrm{ad}(\mu^{-1} {*} a)\mu{*}\mathcal{O} \subset \mu{*}\mathcal{O}$ だから，命題 4.2 のところでやったように，$(B; \cdot)$

上の微分 $X_a : B \to B$ を引き起こすが，複素係数であったから X_a が S^*_N 上の接ベクトル場となるためには a に $\bar{a} = -a$ といった条件を付けなければならない．これが満たされていると，S^*_N がコンパクトだから X_a は完備ベクトル場となる．

定理 8.6　N がコンパクトで境界のない C^∞-リーマン多様体のとき，$\forall a \in \Sigma^0_{\mathbb{R}}(T^*_N)$ に対し $\exp_*((\mu^{-1}*a))$ が存在する．$e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ が $(\mathcal{O}; *)$ の 1 径数の自己同型群となる．

$\forall a \in \Sigma^0_{\mathbb{R}}(T^*_N)$ に対し X_a は S^*_N 上の接ベクトル場となる．

この場合には $e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)}\mu \in \mu*\mathcal{O}$ ともなる．

存在の証明は難しい（[30] 参照）のでここでは省略し後半のみを示す．

そこで仮定として発展方程式

$$\partial_t f_t = \mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)f_t, \quad f_0 = f \tag{8.11}$$

が任意の初期データ $f \in \mathcal{O}$ に対して $\forall t \in \mathbb{R}$ で一意的に解けるものとし，これを $e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)}f$ と書くことにする．

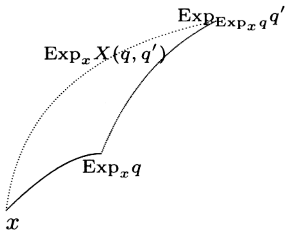
一意性より群をなすことは明らか．$*$-積の連続性より $\partial_t(f_t*g_t) = (\partial_t f_t)*g_t = f_t*(\partial_t g_t)$ だから f_t, g_t が (8.11) の解だと，これを代入し $\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)$ が微分であることを使うと，f_t*g_t も (8.11) の解であることがわかり，$e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)}(f*g) = (e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)}f)*(e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)}g)$ がわかる．さらに，$g_t = e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)}\mu$ とすると $g_0, \partial_t g_t \in \mu*\mathcal{O}$ が容易にわかり，$\mu*\mathcal{O}$ が線形閉部分空間であるから，積分 $\int_0^\tau \partial_t g_t dt = g_\tau - \mu$ も $\mu*\mathcal{O}$ の元となる．

これより，上の仮定のもとでは $e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)}$ は $(B; \cdot)$ 上の 1 径数の自己同型群を引き起こす．したがって $X_a : B \to B$ は完備な接ベクトル場となる．次のことは一般に正しいと思われる．

予想

$\mathcal{O}$ の真空表現が与えられているとき，$t \in \mathbb{R}$ について $X_a : B \to B$ が完備な接ベクトル場ならば，$e_*^{t\mu^{-1}*a}$ が存在する．つまり自己共役性の問題は $X_a : B \to B$ の完備性の問題にすりかわって，N がコンパクトの場合には完全に解決したと見ることができるのではなかろうか？

8.3 真空表現と $\mathbb{R}^{2n}$ 上の擬微分作用素



多様体上で積公式を完全に書き切るためには $\mathrm{Exp}_{\mathrm{Exp}_x q} q'$ を $\mathrm{Exp}_x X(q, q')$ と書いたとき $X(q, q')$ を知る必要があるのだがこれは難しいので，ここでは $N = \mathbb{R}^n$，したがって $T_N^* = \mathbb{R}^{2n}$ の場合を考察する．$\mathbb{R}^n$ 上でならば $\mathrm{Exp}_x q = x + q$ と書いてよいし，$\mathrm{Exp}_{\mathrm{Exp}_x q} q' = \mathrm{Exp}_x(q + q')$ である．

> $\mathrm{Exp}_{\mathrm{Exp}_x q} q'$ を簡単に書く公式はあるのかもしれないが，見つかっていない．普通に書いてみれば恐ろしく複雑に見える式になるし，書き切れてもいないが，何かうまい読み方があるのかもしれない．

8.3.1 積公式

N がコンパクトのときに表象族 $\Sigma^m(T_N^*)$ を (8.9) 式のような展開を持つものとして定義したが，まったく同じ定義で $N = \mathbb{R}^n$ の場合にも $\Sigma^m(\mathbb{R}^{2n})$ を定義する．$\mathbb{R}^n$ 上のヘルマンダー型の擬微分作用素の積は cut off 関数を使う必要がないので，次のように与えられる：

$$\begin{aligned} &P_\phi(b)P_\phi(a) = P_{\phi_1}(c), \\ &c(x;\xi) = os\text{-}\iint b(x, \xi + \hbar\eta)a(x + x', \xi)e^{-i\eta x'}\bar{d}x'\bar{d}\eta. \end{aligned} \tag{8.12}$$

$os\text{-}\iint$ は**振動積分**のことである．計算のしかたは 6.4 節で与えてあるが，多変数の場合で繰り返し説明する．(8.12) 式より

$$c(x;\xi) \sim \sum_\alpha \frac{i\hbar^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha b(x;\xi)\partial_x^\alpha a(x;\xi) = \sum_k \frac{i\hbar^k}{k!} b(\overleftarrow{\partial_\xi}\overrightarrow{\partial_x})^k a \tag{8.13}$$

がわかる．ただし，$\overleftarrow{\partial_\xi}\overrightarrow{\partial_x} = \sum_{i=1}^n \overleftarrow{\partial_{\xi_i}}\overrightarrow{\partial_{x_i}}$，さらに矢印は 5.2.1 項でやったようにどちらの関数を微分するかを表している．これは次のようにも書かれる：

$$c(x;\xi) \sim be^{i\hbar\overleftarrow{\partial_\xi}\overrightarrow{\partial_x}}a. \quad \text{（この式は }\Psi\text{DO-積公式と呼ばれていた）} \tag{8.14}$$

ワイル型の場合は漸近展開は

$$c(x;\xi) \sim be^{\frac{i\hbar}{2}(\overleftarrow{\partial_\xi}\overrightarrow{\partial_x}-\overleftarrow{\partial_x}\overrightarrow{\partial_\xi})}a \ \ (=be^{\frac{i\hbar}{2}\overleftarrow{\partial_\xi}\wedge\overrightarrow{\partial_x}}a) \tag{8.15}$$

となる．(8.15) 式は**モイヤル積公式**と呼ばれていた．

8.3.2 真空表現

擬微分作用素では $\hbar$ まで作用素表現されているというわけではないが，$f(x,y)$ がフーリエ変換を使って $f(x,y)=\iint \hat{f}(s,t)e^{isx}e^{ity}\,d\!\!\!{}^-s\,d\!\!\!{}^-t$ と与えられているときには，

$$\begin{aligned} f(x,y)*\varpi_{00} &= \iint \hat{f}(s,t)e^{-\frac{i\hbar}{2}st}e^{isx}*e^{ity}\,d\!\!\!{}^-s\,d\!\!\!{}^-t*\varpi_{00} \\ &= \iint \hat{f}(s,t)e^{-\frac{i\hbar}{2}st}e^{isx+it0}\,d\!\!\!{}^-s\,d\!\!\!{}^-t*\varpi_{00} \\ &=(e^{\frac{i\hbar}{2}\partial_x\partial_y}f)(x,0)*\varpi_{00} \end{aligned} \tag{8.16}$$

がわかる．これは $(s,t)=(0,0)$ でのテイラー展開と積分を組み合わせて

$$f(x,y)*\varpi_{00}=\frac{1}{\hbar}\iint f(x+\frac{1}{2}s,t)e^{\frac{i}{\hbar}st}\,d\!\!\!{}^-s\,d\!\!\!{}^-t*\varpi_{00}$$

とも書かれる．この式と (8.16) 式と部分積分を使って次のことがわかる．

$a(x,y)\in\mathcal{E}_\infty(\mathbb{C}^2)=\bigcup_{p>0}\varepsilon_p(\mathbb{C}^2)$ とする．任意の急減少関数 $u(x)\in\mathcal{S}$ に対して，(5.17) 式と (8.16) 式を使って，

$$\begin{aligned} a(x,y)*u(x)*\varpi_{00} &= \sum_k\left(\frac{1}{k!}(\frac{\hbar i}{2}\partial_y)^k a(x,y)\cdot\partial_x^k u(x)\right)*\varpi_{00} \\ &= \sum\frac{1}{\hbar}\iint\left(\frac{1}{k!}(\frac{\hbar i}{2}\partial_y)^k a(x+\frac{x'}{2},y')\cdot\partial_x^k u(x+\frac{x'}{2})\right)e^{\frac{i}{\hbar}x'y'}\,d\!\!\!{}^-x'\,d\!\!\!{}^-y'*\varpi_{00} \\ &= \iint a(x+\frac{1}{2}x',\hbar y')u(x+x')\cdot e^{ix'y'}\,d\!\!\!{}^-x'\,d\!\!\!{}^-y'*\varpi_{00} \end{aligned} \tag{8.17}$$

が得られる（$x+x'=x+\frac{x'}{2}+\frac{x'}{2}$ に注意！）．積公式は形式的には (6.34) 式の積分で与えられる．

この計算をふまえて，ワイル型の擬微分作用素を $\forall f\in\tilde{\Sigma}^k(\mathbb{R}^2)$ に対して次の式で定義する：

$$\begin{aligned} &P(f):C_0^\infty(\mathbb{R})\to C^\infty(\mathbb{R}), \\ &(P(f)u)(x):=os\text{-}\iint_{\mathbb{R}^2} f(\frac{x+x'}{2},\hbar y)e^{i(x-x')y}u(x')\,d\!\!\!{}^-x'\,d\!\!\!{}^-y. \end{aligned} \tag{8.18}$$

式の形から $\hbar$ が形式的変数であっても定義できているし，この場合には $a(x,y)$ は C^∞ であればよい．これが 4.2 節の末尾であげた疑問に対する答えである．

$\forall\, f \in \Sigma^k(\mathbb{R}^2)$, $g \in \Sigma^l(\mathbb{R}^2)$ に対して積 $P(f)P(g)$ は再び次数 $k+l$ の擬微分作用素となることがわかっている．つまり $P(f)P(g) = P(h)$ となるような $h \in \Sigma^{k+l}(\mathbb{R}^2)$ がただ 1 つ定まる．$h = f * g$ である（しかし，これはていねいにやってみるだけとはいえ計算は簡単ではない）．

正規順序表示でも同様のことができる．$f(x,y)$ がフーリエ変換を使って (6.29) 式で与えられているときには，ΨDO-積公式で

$$f(x,y) * \varpi_{00} = \int \hat{f}(x,t) e_\circ^{ity} * e_\circ^{\frac{i}{\hbar} x \circ y} \,dt = f_\circ(x,0) \circ \varpi_{00}.$$

（∘ は表示が正規順序表示になっていることを示す単なる気安め）

さらに $e^{ity} * h(x) * e^{-ity} = h(x - \hbar t)$ が成立することより，

$$e^{ity} * h(x) * \varpi_{00} = e^{ity} * h(x) * e^{-ity} * \varpi_{00} = h(x - \hbar t) * \varpi_{00}.$$

これらをもとにして，$\forall a \in \Sigma^m(T^*\mathbb{R})$ に対してヘルマンダー型の擬微分作用素を次の式で定義する：

$a_\circ(x,y) \in \bigcup_{p>0} \mathcal{E}_p(\mathbb{C})$ とする．任意の急減少関数 $f(x) \in \mathcal{S}$ に対して，

$$\begin{aligned} a_\circ(x,y) * f(x) * \varpi_{00} &= \int \hat{a}_\circ(x,t) e^{ity} * f(x) * \varpi_{00} \,dt \\ &= \int \hat{a}_\circ(x,t) f(x - \hbar t) * \varpi_{00} \,dt \\ &= os\text{-}\iint a_\circ(x, \hbar y) f(x+t) e^{ity} \,dt dy * \varpi_{00}. \end{aligned} \tag{8.19}$$

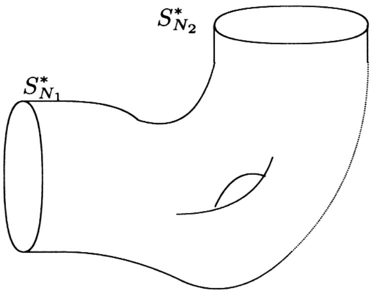
定義式は $\hbar$ が形式的変数の変数であっても定義できているし，しかもこの場合には $a_\circ(x,y)$ は C^∞ であればよい．積公式は (6.30) 式の積分で与えられる．

$\mathbb{R}^{2n}$ で考えると表象として選ばれたある関数 a に対応するヘルマンダー型の擬微分作用素 $P_\phi(a)$ と，ワイル型の $W_\phi(a)$ では作用素としては違っているし，積の公式も違っている．しかし，本書では背後に 2.2.4 項で与えたワイル代数，または 4.3 節で述べた μ-制御代数（あるいはそれを拡張した加群）があり，そ

れの違う表現であると見ているのである.

ヘルマンダー型の擬微分作用素

表象族 $\bigcup_m \Sigma^m(T^*\mathbb{R})$ が ΨDO-積公式に関して結合代数になるが，それの真空表現が結局ヘルマンダー型の擬微分作用素なのである.



注意 8.4 $\Sigma^0(T^*_N)/\Sigma^{-\infty}(T^*_N) = \Sigma^0(N\times N)/\Sigma^{-\infty}(N\times N)$ であり，これの構造は T^*_N の無限遠の近傍だけで決まる．したがって 0-切断の近傍はあってもなくても，別の多様体が貼り付いていようと関係ないのである．たとえば $N = N_1 \cup N_2$ のようになっているときに左図のようなイメージのようになっていてもまったくかまわないのである．そして，この内側の性質はもとの代数 $\mathcal{O}$ の中に書き込まれているのである．これは困ったことではなく，この部分は相互作用を入れ込むスペースと考えられる.

注意 8.5 問題をもう少し具体的に矮小化して述べておこう．$\mathbb{R}^3$ の中の単位球面を S^2 とする．リーマン計量を通して余接束 $T^*_{S^2}$ は接束 T_{S^2} と同一視できる．一方，接球束 S_{S^2} は自然に $\mathbb{R}^3$ の中の互いに直交する 2 本の単位縦ベクトル $(\boldsymbol{a};\boldsymbol{b})$ の組全体と思えるから，3×3 行列 $(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ を考えれば，これは $SO(3)$ の元となり，S_{S^2} は自然に $SO(3)$ と同一視される．したがって $T^*_{S^2}$ の無限遠の近傍は $SO(3)\times[0,\varepsilon)$ と思ってよい.

一方，$T^*_{\mathbb{R}^2} = \mathbb{R}^4$ で単位球面を S^3 としこれを無限遠と思えば，その近傍は $S^3\times[0,\varepsilon)$ と思ってよい．ところで S^3 で原点対称な点 $\pm x$ を同一視する（3 次元射影空間ができる）と $SO(3)$ となることが知られている.

そこで $\Sigma^0(\mathbb{R}^4)$ の元で原点対称な点 $\pm x$ ではいつも同じ値をとる関数のみを考えると，これは $(\Sigma^0(\mathbb{R}^4);*)$ の部分代数になっている．これを $(\Sigma^0_{ev}(\mathbb{R}^4);*)$ と書くと，これの無限遠の近傍はやはり $SO(3)\times[0,\varepsilon)$ と思ってよいわけである．$(\Sigma^0_{ev}(\mathbb{R}^4);*)$ と $(\Sigma^0(S^2\times S^2);*)$ の違いは閉滑作用素の部分に書かれているはずだがいったいどこが違っているのだろうか？

先験的に配位空間を認めてこれを絶対視する立場ならば，前章の擬微分作用

素環を考えていれば話はすむのだが，そうすると対応する古典的相空間は配位空間 N の余接束 T_N^* に限られる．ところがハイゼンベルグの立場からすればこれは対象を限定しすぎていることになる．というのは，ハイゼンベルグの立場ではすべてを演算子代数で表示することを要求はするが，配位空間を絶対視する見方はどこからも出てこないし，シュレーディンガーの考えを持ち出してきても（古典力学が配位空間より相空間のほうを重視してきたいきさつを考えると）なぜ配位空間を絶対視しなければならないのかは説明できない．

ハイゼンベルグの立場で考えようとすると，古典力学からの量子化を考えるというよりは，すでに量子化されていると考えられる対象をそのまま扱って，むしろそれの古典化のほうを考えたくなるのである．このような例はリー環の展開環という形ですでに与えたが，このようなところでそれを何か配位空間 M 上の余接束と関係づけるのはかなり無理がある．最後の章で見るように，リー環の展開環の場合はリー環の括弧積がそのままシンプレクティック形式に変化してシンプレクティック多様体が自然に現れるのである．

さらに前章のようにクリフォード代数までも組み込み，古典微分幾何（テンソル解析）を結合代数の中で見ようとすると super 多様体の考え方が入り込んでくるのである．

> たとえそれが本物でないことがわかっているとしても，本物の姿をわかりやすく見せてくれる偽物は「いかさま」とは違うありがたい偽物である．

第 9 章　ハイゼンベルグ的世界の構成問題

この章では多様体 M 上で $\mathcal{O} = C^\infty(M)[[\mu]]$ であるような μ-制御代数を構成する問題を扱う．そして $\mathcal{O}$ そのものが多様体上の関数環に似た構造を持つことを示す．つまり，$\mathcal{O}$ そのものが，第 1 章でやったような局所的代数の貼り合わせと理解できることを示す．

本当の宇宙の数学モデルなどがつくれると信じている人はおるまい．われわれは素朴観測論を捨て不確定性原理という物理原理を認めたとき，世界の見方をどのように修正しなければならないかを数学的に論じようとしているだけである．

9.1　代数的準備

この節では問題の定式化だけを行なう．μ が中心 (center) の元（すなわち $[\mu, \mathcal{O}] = \{0\}$）の場合を考える．これはポアソン代数の量子化の問題を考えるということである．しばらくは $B = C^\infty(M)$ といった仮定はしないで進む．

この場合には，$1 \in \mathcal{O}$ だから各 $m > 0$ で $\pi_m(1, f) = \pi_m(f, 1) = 0$ を満たし，積 $*$ が結合律を満たすから各 $m \geq 0$ で $\forall f, g, h \in B$ について

$$(E_m): \qquad \sum_{i+j=m} \pi_i(f, \pi_j(g, h)) = \sum_{i+j=m} \pi_i(\pi_j(f, g), h) \tag{9.1}$$

が成立する．逆に (9.1) 式が各 m で成立すれば (4.8) 式で定義した積は形式的

冪級数環 $B[[\mu]]$ の上に結合的な積を定義する.

> もし量子化できない古典力学があったら，世界は本当は量子論でできていて，われわれはその第 1 次近似を見ているにすぎないと昔から主張してきた物理学者の立場はどうなるのだろう.

準解析的 μ-制御代数では (9.1) 式が各 m で成立することが，結合律が成立することと同値になっているわけである.

$(B;\cdot,\{\ ,\ \})$ をポアソン代数としよう．前に述べたように，$(B;\cdot,\{\ ,\ \})$ の量子化問題とは結合代数 $(B[[\mu]];*)$ で，積 $*$ が $[\mu, B]=\{0\}$ と，次式

$$a*b = a\cdot b + \frac{1}{2}\mu*\{a,b\} + \cdots + \mu^n*\pi_n(a,b) + \cdots$$

で与えられるものを探すことである．記号を統一して $\pi_0(a,b)=a\cdot b$, $\pi_1(a,b)=\frac{1}{2}\{a,b\}$ のようにおくと，量子化問題は π_k $(k\geq 2)$ を (9.1) 式の (E_k) を満たすように構成するという問題である.

> **量子化**
>
> われわれはあまりにも人間的スケールで物を見ることに慣れすぎて量子的世界を表現する言葉を持っていない．古典世界と量子世界とをつなぐ言葉を探すには古典力学だけでなく古典幾何学のような古典的概念の**量子化**を考えなければならない．量子化問題を物理学の特殊な問題と見るのは間違いである.

これは μ をあくまで形式的変数として量子化問題を考えた立場である． しかし，$\mathcal{O}$ に対し $\mathcal{O}/\mathcal{O}_\infty$ はいつでも考えられるのだから，上ができなければ話にならないわけである.

9.1.1 余複体

この節での話は代数的なものばかりだから，位相については何も言わないが位相込みで考えるときには考える写像はすべて連続写像として扱う.

以下の話では係数体は $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$ のどちらでもよいので，K を $\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ を表す記号とする．V を K を係数体とするベクトル空間（無限次元でもよい）とする．$\mathrm{C}^p(V)$ を $V\times\cdots\times V$ （p 個）から V への p-重線形写像全体とする．ただし,

$p=0$ のときは，$\mathrm{C}^0(V)=V$ とする．これらは K を係数体とするベクトル空間となる．

さらに，$\mathrm{C}^p(V)$ の元のうち**対称** p-**重線形写像**となるもの全体を $\mathrm{SC}^p(V)$ と書き，**交代** p-**重線形写像**となるもの全体を $\mathrm{AC}^p(V)$ と書くことにする．$\mathrm{C}^i(V)$ $(i=0,1)$ は $\mathrm{AC}^i(V)$ とも $\mathrm{SC}^i(V)$ とも思うことにする．

一般に **2 項演算**と呼ばれるものは $\mathrm{C}^2(V)$ の元 π のことであるが，π は V 自身に定義されている積のように思ってよい．$\pi\in\mathrm{C}^2(V)$ を 1 つ固定する．

> 代数的構造をいうときには哲学はいわないから，何を感じるかは個人の自由である．

π に関する**ホッホシルト** (Hochschild) **の余境界作用素** δ_π とは次のように定義される $\mathrm{C}^p(V)$ から $\mathrm{C}^{p+1}(V)$ への写像のことである：

$$\begin{aligned}\delta_\pi f(v_1,\cdots,v_{p+1}) &= \pi(v_1, f(v_2,\cdots,v_{p+1}))\\ &\quad +\textstyle\sum_{i=1}^{p}\ (-1)^i f(v_1,\cdots,\pi(v_i,v_{i+1}),\cdots,v_{p+1})\\ &\qquad +(-1)^{p+1}\pi(f(v_1,\cdots,v_p),v_{p+1}),\\ (\delta_\pi v)(v_1) &= \pi(v_1,v).\end{aligned}\tag{9.2}$$

このような式を読み取るにはかなりの熟練を要する．これを読むには $p=1,2,3\cdots$ と順次頭を慣れさせて理解するのである．

この定義よりただちに $\forall\pi,\pi'\in\mathrm{C}^2(V)$ に対して次がわかる：

$$\delta_\pi\pi'=\delta_{\pi'}\pi,\quad \delta_\pi I=\pi\quad (I=\text{恒等写像}),\quad \delta_\pi\delta_\pi\pi=0.\tag{9.3}$$

比較のため同時に与えるが，$\pi\in\mathrm{AC}^2(V)$ に関する**シュヴァレー** (Chevalley) **の余境界作用素** $d_\pi:\mathrm{AC}^p(V)\to\mathrm{AC}^{p+1}(V)$ というものは次の式で定義される．$\check{v}_i$ などはその部分が抜けていることを表す：

$$\begin{aligned}(d_\pi F)(v_1,\ldots,v_{p+1}) &= \sum_{i=1}^{p+1}(-1)^{i+1}\pi(v_i,F(v_1,\ldots,\check{v}_i,\ldots,v_{p+1}))\\ &\quad +\sum_{i<j}(-1)^{i+j}F(\pi(v_i,v_j),v_1,\ldots,\check{v}_i,\ldots,\check{v}_j,\ldots,v_{p+1}).\end{aligned}\tag{9.4}$$

さらに，$(d_\pi v)(v_1)=\pi(v_1,v)$ とする．これと (2.13) 式とを見比べてほしい．

(9.3) 式と同様，$\forall\pi,\pi'\in\mathrm{AC}^2(V)$ に対して

$$d_\pi\pi'=d_{\pi'}\pi,\quad d_\pi I=\pi\quad (I=\text{恒等写像}),\quad d_\pi d_\pi\pi=0\tag{9.5}$$

が得られる．(9.3), (9.5) 式の第 3 の式で π のところに $r\pi+s\pi'+t\pi''$, $r,s,t\in K$ を代入して第 1 の式と組み合わせると

$$\sum_{(\pi,\pi',\pi'')}\delta_\pi\delta_{\pi'}\pi''=0, \qquad \sum_{(\pi,\pi',\pi'')}d_\pi d_{\pi'}\pi''=0 \tag{9.6}$$

が得られる．$\sum_{(\pi,\pi',\pi'')}$ は**巡回和**といって，π,π',π'' に関してクルクル巡回的に回して加えるという意味である．(9.6) 式を (9.3), (9.5) 式の**線形化**という．

$\pi\in \mathrm{C}^2(V)$ を V に定義された積（2 項演算）$(u,v)\to\pi(u,v)$ と見ると，

$$\frac{1}{2}\delta_\pi\pi(v_1,v_2,v_3)=\pi(v_1,\pi(v_2,v_3))-\pi(\pi(v_1,v_2),v_3)$$

であり，これを**結合子** (associator) と呼ぶ．$\delta_\pi\pi=0$ ということと，(V,π) が結合代数ということとは同値である．さらに，(V,π) が結合代数であれば，$\forall f\in \mathrm{C}^p(V)$ に対して $\delta_\pi^2 f=0$ となることが容易にわかる．とくに恒等写像 I に対しても $\delta_\pi^2 I=\delta_\pi\pi=0$ となるから，$\delta_\pi^2=0\Leftrightarrow\delta_\pi\pi=0$ で，ともに (V,π) が結合代数であることを表している．

一方，結合子 $\frac{1}{2}\delta_\pi\pi(v_1,v_2,v_3)$ が $\forall v_1,v_2,v_3$ に関して交代性を持っている（どの 2 つを入れ換えても符号がかわる）場合，(V,π) を**交代代数** (alternative algebra) という．この代数は結合代数よりやや弱い性質だが，結合律を満たす代数の奥のほうに潜んで補助線の役目をするので例外型リー群を扱う数学にしばしば顔を出す．また，ケーリー数とかオクタニオン（8 元数）と呼ばれているものは交代代数の重要な例になっている．こういうものも量子論的に意味のあるものでなかろうかと考える見方は結構根強い．

> 結合律のみが重要視されるのは，おそらく人間の側の都合によるものと思われる（人間性の原理）．

$\xi\in \mathrm{C}^1(V)$ が $\delta_\pi\xi=0$ を満たすとすると，これは

$$\pi(u,\xi(v))-\xi(\pi(u,v))+\pi(\xi(u),v)=0$$

だから，$\xi:V\to V$ が (V,π) の微分になっていることを意味する．

$\pi\in \mathrm{AC}^2(V)$ のときは $\forall A\in \mathrm{C}^1(V)$ に対し $d_\pi A=\delta_\pi A$ がわかる．また

$$(d_\pi\pi)(u,v,w)=2\sum_{(u,v,w)}\pi(u,\pi(v,w))$$

であり，左辺は u,v,w に関して交代である．ゆえに $d_\pi \pi = 0$ は (V,π) がリー代数となるための必要十分条件である．(V,π) がリー代数ならば $\forall F \in \mathrm{AC}^p(V)$ で $d_\pi^2 F = 0$ となる．とくに $d_\pi^2 I = d_\pi \pi = 0$，したがって $d_\pi^2 = 0 \Leftrightarrow d_\pi \pi = 0$ である[1)]．

以下では次の記号を用いる．$\varpi \in \mathrm{C}^2(V)$ に対して，ϖ の対称部分，歪対称部分を

$$\varpi^+(u,v) = \frac{1}{2}(\varpi(u,v) + \varpi(v,u)), \quad \varpi^-(u,v) = \frac{1}{2}(\varpi(u,v) - \varpi(v,u))$$

と定義する．$\varpi^+ \in \mathrm{SC}^2(V)$，$\varpi^- \in \mathrm{AC}^2(V)$ であり，$\varpi = \varpi^+ + \varpi^-$ である．次の公式は直接計算でわかる．$\pi \in \mathrm{C}^2(V)$ に対して

$$\mathfrak{S}_{(1,2,3)} \delta_\pi \pi(v_1, v_2, v_3) = 2 d_{\pi^-} \pi^-(v_1, v_2, v_3). \tag{9.7}$$

$C : V \times V \to V$ に対して $(\sigma_2 C)(u,v) = C(v,u)$ と定義する．同様，$T : V \times V \times V \to V$ に対して変数を巡回的に入れ換える記号 $\mathfrak{c}_3$ を $(\mathfrak{c}_3 T)(f,g,h) = T(g,h,f)$（変数の巡回順送り）と定義する．$\forall T$ に対して次のことがすぐわかる：

$$(1 - \mathfrak{c}_3 + \mathfrak{c}_3^2)(1 + \mathfrak{c}_3)T = 2T, \quad (1 + \mathfrak{c}_3 + \mathfrak{c}_3^2)(1 - \mathfrak{c}_3)T = 0. \tag{9.8}$$

補題 9.1　$\pi \in \mathrm{SC}^2(V), \varpi \in \mathrm{C}^2(V)$ とする．このとき $\delta_\pi \varpi = 0$ と，$\delta_\pi \varpi^+ = 0$ かつ $\delta_\pi \varpi^- = 0$ とは同値である．しかも，ϖ^- は π に関する双微分になっている．

逆に $\varpi \in \mathrm{C}^2(V)$ が π に関する双微分ならば $\delta_\pi \varpi = 0$ である．

証明　容易に $\delta_\pi \varpi = 0 \Leftrightarrow \delta_\pi(\sigma_2 \varpi) = 0$ がわかる．これを $\varpi^\pm = \frac{1}{2}(\varpi \pm \sigma_2 \varpi)$ に用いれば前半がわかる．後半は第 2 変数に関する余境界作用素を

$$(\partial_2 \varpi)(f,g,h) = \pi(g, \varpi(f,h)) - \varpi(f, \pi(g,h)) + \pi(\varpi(f,g), h)$$

と定義すると，$(1 + \mathfrak{c}_3)\partial_2 \varpi^- = -\delta_\pi \varpi^-$ となり，(9.8) 式の最初の恒等式を使うと $\partial_2 \varpi^- = 0$ がわかる．ϖ^- は歪対象だから，これから双微分ということがわかる．最後のことはそのまま書いてみれば自明．（証明終わり）

---

1)　(V,π) がリー代数のとき $d_\pi^2 = 0$ を示すのは案外面倒である．3.3.2 項参照．

9.1.2 s-段目の構成問題

9.1 節で述べた構成問題のうち s-段目の構成問題というのは与えられた $\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_{s-1}$ から π_s を構成する問題である．以下では $\pi_0^- = 0$ （π_0 が可換積），$\pi_1^+ = 0$（π_1 が交代）とする．次のことは容易であろう：

$\pi_0, \ldots, \pi_{s-1}$ は各 $1 \le m \le s-1$ で (9.1) 式の (E_m) を満たす．	$\Longleftrightarrow$	$\varpi_{s-1} = \sum_{i=0}^{s-1} \mu^i \pi_i$ とすると $\delta_{\varpi_{s-1}} \varpi_{s-1} = 0 \mod \mu^s$.

右は $\mu^s = 0$ とすれば ϖ_{s-1} が $\bigoplus_{i=0}^{s-1} \mu^i * B$ 上の結合的積を与えるということである．したがって，$\varpi_s = \varpi_{s-1} + \mu^s * \pi_s$ が $\mathrm{mod}\ \mu^{s+1}$ で結合律を満たすようにできることと $\delta_{\varpi_s} \varpi_s = 0 \mod \mu^{s+1}$ は同値である．

記号を簡単にするために，$\delta_i = \delta_{\pi_i}$ のように書くと，上の式は $\mu^k, 0 \le k \le s-1$ のところは消えて，

$$\delta_{\varpi_s} \varpi_s = \mu^s \Bigl(\delta_0 \pi_s + \delta_s \pi_0 + \sum_{i+j=s, i,j \ge 1} \delta_i \pi_j \Bigr) = 0$$

となる．$\delta_0 \pi_s = \delta_s \pi_0$ だから，解くべき式は次で与えられる：

$$\delta_0 \pi_s = -Q_s, \quad Q_s = \frac{1}{2} \sum_{i+j=s, i,j \ge 1} \delta_i \pi_j. \tag{9.9}$$

これは一意的に解けるわけではなく，$\delta_0 \xi = 0$ となる ξ の不定性がある．

> $\delta_0^2 = 0$ だから，$\delta_0 Q_s = 0$ は必要条件（可解条件）に見える．

しかし，次が成立する．

補題 9.2　$\pi_0, \ldots, \pi_{s-1}$ が $1 \le \forall m \le s-1$ で (9.1) 式の (E_m) を満たすように与えられているときには $\delta_0 Q_s = 0$ である．

証明　$\mu^s = 0$ とすれば ϖ_{s-1} が結合的積を与えるので $\delta_{\varpi_{s-1}} \varpi_{s-1} = 0, \delta_{\varpi_{s-1}}^2 = 0$ を書き直して，$0 \le \forall m \le s-1$ で $\sum_{i+j=m} \delta_i \pi_j = 0$, $\sum_{i+j=m} \delta_i \delta_j = 0$ であり，とくに $1 \le \forall m \le s-1$ で $\sum_{i+j=m} \delta_{s-m} \delta_i \pi_j = 0$, $\sum_{i+j=m} \delta_i \delta_j \pi_{s-m} = 0$ となり，これを書き直して

$$\sum_{\substack{i+j=s \\ i,j \ge 1}} \delta_i \delta_0 \pi_j + \sum_{\substack{i+j=s \\ i,j \ge 1}} \delta_i \delta_j \pi_0 + \sum_{\substack{a+b+c=s \\ a,b,c \ge 1}} \delta_a \delta_b \pi_c = 0,$$

$$\sum_{\substack{i+j=s \\ i,j \ge 1}} \delta_0 \delta_i \pi_j + \sum_{\substack{i+j=s \\ i,j \ge 1}} \delta_i \delta_0 \pi_j + \sum_{\substack{a+b+c=s \\ a,b,c \ge 1}} \delta_a \delta_b \pi_c = 0$$

を得る．最後の項は巡回和を含むので (9.6) 式より消えて，さらに (9.3) 式より $\delta_i\delta_0\pi_j = \delta_i\delta_j\pi_0$ だから，$\sum_{\substack{i+j=s\\ i,j\geq 1}} \delta_0\delta_i\pi_j = 0$ を得る．（証明終わり）

一方，結合代数は交換子積でリー代数にもなるから記号を簡単にして $d_i^- = d_{\pi_i^-}$ のように書けば，

$$\boxed{\delta_{\varpi_s}\varpi_s = 0} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{d_{\varpi_s^-}\varpi_s^- = 0} \quad\Longleftrightarrow\quad \boxed{\textstyle\sum_{i+j=s,i,j\geq 0} d_i^-\pi_j^- = 0}$$

である．ところが $\pi_0^- = 0$（可換積）だから，和は $i+j=s, i,j \geq 1$ でとればよい．そこで次のようにおく：

$$R_s = \frac{1}{2}\sum_{i+j=s,i,j\geq 1} d_i^-\pi_j^-. \tag{9.10}$$

すると，R_s は巡回和を使って $R_s(a,b,c) = \underset{(a,b,c)}{\mathfrak{S}} \sum_{i+j=s} \pi_i^-(a, \pi_j^-(b,c))$ とも書かれる．R_s は $\{\pi_1^-, \ldots, \pi_{s-1}^-\}$ だけから計算できることに注意しよう．したがって π_i^-, π_j^- のどちらかが消えることから，次がわかる．

補題 9.3 $\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_{s-1}$ が正則条件 $\pi_k(a,b) = (-1)^k\pi_k(b,a)$ を満たすときには奇数 s については $R_s = 0$ である．

これまでの論議から，次のことがわかる．

補題 9.4（必要条件） π_s が (9.9) 式を満たすならば $R_s = 0$ である[2)]．

π_s をうまく選んで，上の結合的積が $\mathrm{mod}\ \mu^{s+1}$ まで拡張できるためには，$R_s = 0$ となっていないといけないわけである．したがって $R_s \neq 0$ となる場合が問題だから，この場合を詳しく調べよう．

δ_i を d_i^- に替えて，補題 9.2 と同様の論議を行なうと次がわかる．

補題 9.5 $\pi_0, \ldots, \pi_{s-1}$ が $1 \leq \forall m \leq s-1$ で (9.1) 式の (E_m) を満たすように与えられているときには $d_1^- R_s = 0$ である．

---

2) しかし，この必要条件は $\pi_0, \pi_1, \cdots, \pi_{s-1}$ が与えられているときのものであって，$R_s \neq 0$ でも $B = C^\infty(M)$ の場合には $\pi_2, \cdots, \pi_{s-1}$ を選び直せば $R_s = 0$ となるようにできるというのが Kontsevich[15] の結果である（[42] 参照）．

$R_s = 0$ の使い方

与えられた μ-制御代数 $\mathcal{O}$ を μ-冪展開して考えているときにはどんな B を選んだとしても，$\forall s$ で $R_s = 0$ である．このことを利用してフィルタリングを変更して，うまい性質が現れるようにできる．これは，量子化ではなく，うまい古典化の問題である．

もう少し詳しく R_s の性質を見ると，

補題 9.6 上と同じ条件のもとで，R_s は交代 3-重微分である．

$B = C^\infty(M)$ の場合には，交代 3-重微分とは交代 $(0,3)$-テンソルのことであった．

証明 交代性は明らかだから，3-重微分を示す．$\varpi_{s-1} = \sum_{i=0}^{s-1} \mu^i \pi_i$ で決まる積を $f * g = \varpi_{s-1}(f,g)$ とする．これは $\bmod\ \mu^s$ で結合律を満たす．

一般の結合代数で対称積を $u \circ v = \frac{1}{2}(u * v + v * u)$ と定義する．この積は結合律を満たさないが次の公式は容易である：

$$[u, v\circ w] = [u,v]\circ w + v\circ[u,w],$$
$$u\circ(v\circ w) - (u\circ v)\circ w = \frac{1}{4}[v,[w,u]].$$

この公式を使って**サボらないで書き下して**みると

$$\mathfrak{S}_{f,g,h\circ k}[f,[g,h\circ k]] = h\circ\mathfrak{S}_{f,g,k}[f,[g,k]] + \mathfrak{S}_{f,g,h}[f,[g,h]]\circ k \mod \mu^{s+1}$$

となり，$R_s(f,g,hk) = hR_s(f,g,k) + R_s(f,g,h)k$ を意味することがわかる．したがって R_s の交代性より 3-重微分となる．（証明終わり）

$F \in \mathrm{C}^p(V)$, $F = F(v_1, \cdots, v_p)$ が各 v_i $(1 \le i \le p)$ について積 π に関して微分のとき，p-**重微分** (p-derivation) であるという．π に関する p-重微分の全体を $\mathcal{X}^p(V,\pi)$ と書く．さらに，交代性も持っている p-微分の全体を $\mathcal{A}^p(V,\pi)$ と書く．つまり $\mathcal{A}^p(V,\pi) = \mathrm{AC}^p(V)\cap\mathcal{X}^p(V,\pi)$ である．

V 上の 2 つの積 π, π' で $\pi \in \mathrm{C}^2(V)$, $\pi' \in \mathcal{A}^2(V,\pi)$ であるものを考える．

定義 9.1 (V,π,π') で $\pi \in \mathrm{SC}^2(V)$, $\delta_\pi\pi = 0$ かつ $d_{\pi'}\pi' = 0$ のとき**ポアソン代数**という．$\pi \in \mathrm{C}^2(V)$ のときには (V,π,π') は**非可換ポアソン代数**と呼ばれ

る．とくに，π が結合代数を与えるならば (V,π,π^-) は非可換ポアソン代数である．

補題 9.7　$\pi\in \mathrm{C}^2(V)$, $\pi'\in\mathcal{A}^2(V,\pi)$ ならば $d_{\pi'}\mathcal{A}^p(V,\pi)\subset\mathcal{A}^{p+1}(V,\pi)$ である（π が非可換でもよいことに注目）．

証明　$d_{\pi'}C(v_1,\cdots,v_{p+1})$ の定義を書き，v_k のところを $\pi(u_k,v_k)$ に置き換える．π' および C が π に関して微分になっていることを使って式変形して

$$d_{\pi'}C(v_1,\cdots,\pi(u_k,v_k),\cdots,v_{p+1})=$$
$$\pi(u_k,d_{\pi'}C(v_1,\cdots,v_k,\cdots,v_{p+1})+\pi(d_{\pi'}C(v_1,\cdots,u_k,\cdots,v_{p+1}),v_k)$$

を証明するのだが，途中に出てくる $\pi(\pi'(u_k,v_j),C(v_1,\cdots,v_k,\cdots,v_{p+1}))$, $\pi(C(v_1,\cdots,u_k,\cdots,v_{p+1}),\pi'(v_k,v_j))$ のような項はすべて $\pm$ で消えてしまうことを見ればよい．　（証明終わり）

9.2　コホモロジー群

コホモロジーというのは数学的に頭を使うことの代数的構造を一面でよく表している．数学の基本言語みたいなものである．知らなくても何とかなるが，知っていると便利である．

ここで，一般に余鎖複体とコホモロジー群なるものの定義を与えておこう．自然数 p ごとに $\mathrm{C}^p(V)$ や $\mathcal{A}^p(V,\pi)$ のような線形空間 C^p と，線形写像 $d:\mathrm{C}^p\to\mathrm{C}^{p+1}$ が与えられており，d を 2 つ合成して $d^2:\mathrm{C}^p\to\mathrm{C}^{p+2}$ をつくると $d^2=0$ となるとき，$\{\mathrm{C}^p,d;p=0,1,2\cdots\}$ を**余鎖複体** (cochain complex) と呼ぶ．このとき

$$Z^p=\{c\in\mathrm{C}^p;dc=0\},\qquad B^p=\{dc;c\in\mathrm{C}^{p-1}\}$$

とおき，それぞれの元を p-**余輪体** (cocycle)，p-**余境界** (coboundary) と呼ぶ．$d^2=0$ だから $B^p\subset Z^p$ である．商空間 $H^p=Z^p/B^p$ を余鎖複体 $\{\mathrm{C}^*,d\}$ の p-次の**コホモロジー群**と呼ぶ．

余鎖複体はさまざまなところに現れ，いろいろ呼名があるのでそれを列記しておこう．

C^∞-多様体 M 上の外微分環 $(\mathcal{F}^*, d)$ は余鎖複体をなす．これのコホモロジー群を**ド・ラーム (de Rham)・コホモロジー群**と呼び，$H^p(M)$ と書く．

$(\mathrm{C}^2(V), \pi)$ が結合代数のとき，π に関するホッホシルトの余境界作用素 δ_π とでつくられる余鎖複体をホッホシルト余鎖複体と呼ぶ．これのコホモロジー群を**ホッホシルト・コホモロジー群**と呼び $HH^p(V;\pi)$ と書く．

$(\mathrm{AC}^2(V), \pi)$ がリー代数のとき，$\pi \in \mathrm{AC}^2(V)$ に関するシュヴァレーの余境界作用素 $d_\pi : \mathrm{AC}^p(V) \to \mathrm{AC}^{p+1}(V)$ とでつくられる余鎖複体をシュヴァレー余鎖複体と呼ぶ．これのコホモロジー群を**シュヴァレー・コホモロジー群**と呼び $CH^p(V;\pi)$ と書く．

ポアソン代数 $(V; \cdot, \{\ ,\ \})$ で $\mathcal{A}^p(V)$ を $V \times \cdots \times V$ から V への交代 p-微分全体とする．$(V; \cdot, \{\ ,\ \})$ はリー代数なのでこれのシュヴァレー・コホモロジー群が自然に定義される．$(\mathcal{A}^p(V); d)$ は $(\mathrm{AC}^p(V), d)$ の部分複体で，シュヴァレー境界作用素 d は $\mathcal{A}^p(V)$ から $\mathcal{A}^{p+1}(V)$ への線形作用素となる．$(\mathcal{A}^*(V); d)$ のコホモロジー群を**ド・ラーム – シュヴァレー・コホモロジー群**または**ポアソン・コホモロジー群**と呼び $PH^*(V)$ と書く．

$d_1^- R_s = 0$ であったから R_s は π^- に関するド・ラーム – シュヴァレー 3-余輪体である．つまり R_s は $PH^3(B)$ の元を指定する．これに補題 4.4 を使うと次がわかる．

命題 9.1 $R_s = d_1^- \xi_{s-1}$, $\xi_{s-1} \in \mathcal{A}^2(B)$ ならば $\delta_0 \xi_{s-1} = 0$ だから，π_{s-1} を $\pi_{s-1} + \xi_{s-1}$ で置き換えることができ，$R_k = 0\ (1 \le k \le s-1)$ は変えずに $R_s = 0$ とできる．とくに $PH^3(B) = 0$ ならばいつでも $R_s = 0$ とできる．

$(M, \{\ ,\ \})$ がシンプレクティック多様体のときには $PH^*(C^\infty(M)) \cong H^*(M)$ であるが，一般には $PH^*(V)$ を確定するのはかなり面倒である．

9.2.1 $HH^*(C^\infty(U); \cdot)$, $HH^2(\mathcal{F}_U^*; \wedge)$ について

U を $\mathbb{R}^n$ の開部分集合とする．ホッホシルト・コホモロジー群については，次のことが基本的である．

命題 9.2 $HH^k(C^\infty(U); \cdot) = \mathcal{A}^k(C^\infty(U))$.

この命題の証明は行なわないが，$(\mathcal{F}_U^2; \circ)$ の場合の証明から推察してもらいたい．大概のことは上の命題で型がつく．

μ-制御代数では $\mathcal{O} = B \oplus \mu * \mathcal{O}$ であり $(B; \cdot)$ は可換代数であった．これが局所性を持っている場合を考えよう．

定義 9.2 $\pi : C^\infty(M) \times \cdots \times C^\infty(M)$ （k 個） $\to C^\infty(M)$ が **k-重微分作用素**であるとは，$\pi(f_1, \cdots, f_k)$ がどの f_i についても，線形の微分作用素になっている場合をいう．またこのときの微分階数の和を**総次数**と呼ぶ．

局所座標系を用い，多重指標を用いれば

$$\pi(f_1, \cdots, f_k) = \sum_{\alpha} F_{\alpha_1, \cdots, \alpha_k}(\boldsymbol{x}) \partial^{\alpha_1} f_1 \cdots \partial^{\alpha_k} f_k$$

のように書かれるというだけだから，外微分環の k-重線形作用素 $\pi : \mathcal{F}_M^* \times \cdots \times \mathcal{F}_M^* \to \mathcal{F}_M^*$ に対しても **k-重微分作用素**という概念は同様に定義される．

U を $\mathbb{R}^n$ の開集合，$(\mathcal{F}_U^*; \wedge)$ を U 上の C^∞-外微分環とする．

定理 9.1 θ を $(\mathcal{F}_U^*; \circ)$ における**対称な**ホッホシルト-2-余輪体とすると，θ は必ずホッホシルト-2-余境界となる．つまり $\theta = \delta_0 \xi$ と書かれる．

$(\mathcal{F}_U^*; \circ)$ の代わりに $(C^\infty(M); \cdot)$ で考えても同様の結果となる．

θ が総次数が m の双微分作用素のときには，ξ は次数 m の線形の微分作用素になる．

証明 $\delta_0 \theta(1, 1, \omega) = 0$ だから，$\theta(1, \omega) = \theta(1, 1)\omega$ である．そこで，$\eta(\omega) = \theta(1, \omega)$ とすると，$\theta(1, \omega) - \delta_0 \eta(1, \omega) = 0$ がわかるから，θ の代わりに $\theta - \delta_0 \eta$ を考えると，初めから $\theta(1, \omega) = \theta(\omega, 1) = 0$ としておいてよい．

$\mathcal{F}_U^*$ の特徴は座標関数が使えるということで，$\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in U$ を任意に固定し，$\forall \omega \in \mathcal{F}_U^*$ に対して

$$\omega_i^a = \omega(a_1, \ldots, a_{i-1}, x_i, \ldots, x_n), \quad \omega_{n+1}^a = \omega(\boldsymbol{a})$$

のようにおくと，$\omega_i^a(\boldsymbol{a}) = \omega(\boldsymbol{a})$ は明らかで，さらに $\frac{\omega_i^a - \omega_{i+1}^a}{x_i - a_i} \in \mathcal{F}_U^*$ である．このように生成元を使って書かれることが証明のポイントで，

$$\xi(\omega)(\boldsymbol{a}) = -\sum_{i=1}^{n} \theta\left(\frac{\omega_i^a - \omega_{i+1}^a}{x_i - a_i}, x_i - a_i\right)(\boldsymbol{a}) \tag{9.11}$$

とおくと，$\omega, \eta \in \mathcal{F}_U^*$ に対して

$$\delta_0\xi(\omega,\eta)(\boldsymbol{a})$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\left\{\theta(\omega_i^a\circ\frac{\eta_i^a-\eta_{i+1}^a}{x_i-a_i}, x_i-a_i)(\boldsymbol{a}) - \omega(\boldsymbol{a})\circ\theta(\frac{\eta_i^a-\eta_{i+1}^a}{x_i-a_i}, x_i-a_i)(\boldsymbol{a})\right\}$$
$$+ \sum_{i=1}^{n}\left\{\theta(\eta_{i+1}^a\circ\frac{\omega_i^a-\omega_{i+1}^a}{x_i-a_i}, x_i-a_i)(\boldsymbol{a}) - \eta(\boldsymbol{a})\circ\theta(\frac{\omega_i^a-\omega_{i+1}^a}{x_i-a_i}, x_i-a_i)(\boldsymbol{a})\right\}.$$

$\theta(\omega,1)=0$ で，$\delta_0\theta=0$ より $\theta(\omega\circ\eta,h)-\omega\circ\theta(\eta,h)=\theta(\omega,\eta\circ h)-\theta(\omega,\eta)\circ h$ だから，$(x_i-a_i)(\boldsymbol{a})=0$ に注意すると

$$\delta_0\xi(\omega,\eta)(\boldsymbol{a}) = \sum_{i=1}^{n}\{\theta(\omega_i^a,\eta_i^a-\eta_{i+1}^a)+\theta(\eta_{i+1}^a,\omega_i^a-\omega_{i+1}^a)\}(\boldsymbol{a})$$
$$= \sum_{i=1}^{n}\{\theta(\omega_i^a,\eta_i^a)-\theta(\eta_{i+1}^a,\omega_{i+1}^a)\}(\boldsymbol{a}) = \theta(\omega,\eta)(\boldsymbol{a}).$$

θ が総次数が m の双微分作用素のときには ω の $\boldsymbol{a}$ でのテイラー展開を考えれば，ξ は次数 m の線形の微分作用素になることがわかる．　　　（証明終わり）

構成した ξ は座標関数 $x^1,\cdots,x^n$ に対して $\xi(x^i)=0$ という性質を持っていることを覚えておこう．

9.2.2　B が M 上の外微分環 $(\mathcal{F}_M^*;\circ)$ の場合など

B が多様体上の外微分環，$B=(\mathcal{F}_M^*;\circ)$ の場合を考えよう．積の構造は $\wedge$ ではなく，その対称積 $\circ$ を使っている．

$$\mathcal{O} = \mathcal{F}_M^* \oplus \mu*\mathcal{F}_M^* \oplus \cdots \oplus \mu^N*\mathcal{F}_M^* \oplus \mu^{N+1}*\mathcal{O}$$

と展開して考え，1 の分解を用いて定理 9.1 を多様体の上に拡張しよう．

定理 9.2　パラコンパクト有限次元多様体 M で，θ を $(C^\infty(M);\cdot)$，または $(\mathcal{F}_M^*;\circ)$ における**対称な**ホッホシルト-2-余輪体とすると，θ は必ずホッホシルト-2-余境界となる．つまり $\theta=\delta_0\xi$ と書かれる．

証明　$(\mathcal{F}_M^*;\circ)$ の場合で行なうが，$(C^\infty(M);\cdot)$ の場合もまったく同じである．

$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を M の局所有限開被覆とする．$\forall\alpha\in A$ に対し $A_\alpha=\{\beta\in A; U_\alpha\bigcap U_\beta\neq\emptyset\}$ とし，$U_\alpha^\star=\bigcup\{U_\beta;\beta\in A_\alpha\}$ とおく．さらに $A_\alpha^\star=\{\beta\in A;$

$U_\beta \bigcap U_\alpha^\star \neq \emptyset\}$ とし $U_\alpha^{\star\star} = \bigcup\{U_\beta; \beta \in A_\alpha^\star\}$ とおく．十分細かい局所有限開被覆をとれば，$\forall\alpha$ について $U_\alpha^{\star\star}$ は M の局所座標近傍に含まれているとしてよい．$\{\phi_\alpha\}_\alpha$ を開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に従属する 1 の分解とする．

$\delta_0\phi_\alpha\theta = \phi_\alpha\delta_0\theta = 0$ だから，各 α で $\phi_\alpha\theta = \delta_0\xi_\alpha$ となる ξ_α の存在を示せば十分．H_α を M 上の C^∞-関数で $\operatorname{supp}\phi_\alpha$ 上で $H_\alpha = 0$ でありかつ $M - U_\alpha$ 上で $H_\alpha = 1$ となるものとする．

$\theta_{H_\alpha}(f) = \phi_\alpha\theta(H_\alpha, f)$ とおき，$\theta'_\alpha = \phi_\alpha\theta + \delta_0\theta_{H_\alpha}$ を考えよう．

$\operatorname{supp} f$ または $\operatorname{supp} g$ が $M - U_\alpha$ に含まれている場合には $\delta_0\phi_\alpha\theta = 0$ および $H_\alpha\phi_\alpha\theta = 0$ から $\phi_\alpha\theta(f,g) = -(\delta_0\theta_{H_\alpha})(f,g)$ が得られる．これの証明には $fH_\alpha = f$ または $gH_\alpha = g$ となること，および $f\phi_\alpha$ または $g\phi_\alpha$ が恒等的に 0 となることが使われている．

これより $\operatorname{supp} f$ または $\operatorname{supp} g$ が $M - U_\alpha$ に含まれている場合には $\theta'_\alpha(f,g) = 0$ がわかる．したがって，$\theta'_\alpha(f,g)$ を考えるには f, g の台が M の 1 つの局所座標近傍に含まれているものだけを考えておけばよい．

U を局所座標近傍，V, V_1 を $\overline{V} \subset V_1, \overline{V_1} \subset U$ を満たす開集合とする．

そこで θ は $\operatorname{supp} f$ または $\operatorname{supp} g$ が M–V に含まれているときには $\theta(f,g) = 0$ であるものとしよう．

$\operatorname{supp} f, \operatorname{supp} g \subset V_1$ を満たす $\forall f, g$ について $\theta(f,g) = \delta_0\xi(f,g)$ を示せばよい．ϕ を M 上の C^∞-関数で V_1 上 $\phi = 1$ で $\operatorname{supp}\phi \subset U$ となるものとする．定理 9.1 の証明を多様体に使うために

$$\xi(f)(\boldsymbol{a}) = -\sum_{i=1}^{n} \theta\left(\phi\frac{f_i^a - f_{i+1}^a}{x_i - a_i}, \phi(\boldsymbol{x})(x_i - a_i)\right)(\boldsymbol{a}) \tag{9.12}$$

のようにおき，定理 9.1 の証明のように式変形をすれば $f\phi = f$ と $g\phi = g$ を使って証明ができる．（証明終わり）

上の定理の証明では (9.11) 式とか (9.12) 式のつくり方がはっきりしていて，局所座標系，および 1 の分解関数さえ決めておけば一意的に ξ が構成されているという特徴がある．上の定理の応用として次のことを示しておく．

系 9.1　$\mathcal{O} = \mathcal{F}_M^* \oplus \mu * \mathcal{O}$ の場合には，補空間を選び直して $\pi_1^+ = 0$ となるとしてよい．

証明　$\delta_0\pi_1 = 0$ より，$\delta_0\pi_1^+ = 0$ がわかり，定理 9.2 より $\pi_1^+ = \delta_0\xi$ と書かれるから，補空間 B の取り方を $f \to f - \mu * \xi(f)$ で修正すれば補題 4.4 より $\pi_1^+ = 0$ とできる．　　（証明終わり）

系 9.2　$(C^\infty(M)[[\mu]]; *)$ が可換結合代数で，積 $*$ が $f, g \in C^\infty(M)$ に対して $f{*}g = f{\cdot}g + \mu\pi_1^+(f,g) + \cdots + \mu^k\pi_k^+(f,g) + \cdots$ のように与えられているものは，フィルタリングの変更だけで $(C^\infty(M)[[\mu]]; \cdot)$ になる．

証明　容易に $\delta_0\pi_1^+ = 0$ がわかるから，$\pi_1^+ = \delta_0 L_1$ となり，これを使ってフィルタリングを変更すると $\pi_1^+ = 0$ と思ってよいことがわかる．この論議を π_2^+ についても行なえば，ここも消える．これを次々に行なえばよい．

（証明終わり）

9.2.3　チェック・コホモロジー

これまでのものとは少し勝手が違うが後で必要になるのでチェック (Čech)・コホモロジーと呼ばれるものを定義しておこう．まず多様体 M（一般に位相空間でよい）の局所有限開被覆 (2.2.2 項参照) $\mathcal{U}$ が与えられているとする．記号を簡略にして

$$U_{\alpha\beta} = U_\alpha \cap U_\beta, \quad U_{\alpha\beta\cdots\delta} = U_\alpha \cap U_\beta \cap \cdots \cap U_\delta$$

などとする．

さらに各 $U_{\alpha_0\cdots\alpha_p} \neq \emptyset$ $(p \geq 0)$ に対し代数 $\mathfrak{A}_{\alpha_0\cdots\alpha_p}$ が対応しており，それが領域の制限 $|U_\beta$ に対して

$$\mathfrak{A}_{\alpha_0\cdots\alpha_p}|U_\beta = \mathfrak{A}_{\alpha_0\cdots\alpha_p\beta}$$

という関係で結ばれているものとする．さらに $U_{\alpha\beta} \neq \emptyset$ のとき代数の同型

$$\Psi_{\alpha\beta} : \mathfrak{A}_{\alpha\beta} \to \mathfrak{A}_{\beta\alpha}$$

が与えられており，領域の制限 $|U_{\gamma_0\cdots\gamma_p}$ に対して

$$\Psi_{\alpha\beta}(\mathfrak{A}_{\alpha\beta}|U_{\gamma_0\cdots\gamma_p}) = \Psi_{\alpha\beta}(\mathfrak{A}_{\alpha\beta})|U_{\gamma_0\cdots\gamma_p}$$

のように広げて考えられるものとする．

$\omega_{\lambda_0\cdots\lambda_p} \in \mathfrak{A}_{\lambda_0\cdots\lambda_p}$ で，$\lambda_0\cdots\lambda_p$ の任意の置換 $\mu_0\cdots\mu_p$ に対して

$$\omega_{\mu_0\cdots\mu_p} = \mathrm{sgn}\binom{\mu_0\cdots\mu_p}{\lambda_0\cdots\lambda_p}\Psi_{\mu_0\lambda_0}\omega_{\lambda_0\cdots\lambda_p}$$

の関係にあるものを**要素**と呼んでこの要素の形式的和 $\omega = \sum \omega_{\lambda_0\cdots\lambda_p}$ を $\{\Psi_{\alpha\beta}\}$ に関するチェックの **p-コチェイン**（これまでの用語の使い方だと p-余鎖というべきだろうが発音しにくいので，こういっておく）と呼ぶ．チェックの p-コチェイン全体を $C^p(\mathfrak{A})$ と書く．ω に対して余境界作用素 $\delta : C^{p-1}(\mathfrak{A}) \to C^p(\mathfrak{A})$ を次の式で定義する：

$$(\delta\omega)_{\lambda_0\cdots\lambda_p} = \Psi_{\lambda_0\lambda_1}\omega_{\lambda_1\cdots\lambda_p} + \sum_{k=1}^{p}(-1)^k\omega_{\lambda_0\cdots\check{\lambda}_k\cdots\lambda_p}.$$

$\delta\delta\omega = 0$ がわかるのでこれをもとにコホモロジーが定義できる．これを**チェック・コホモロジー**と呼ぶ．（この辺のことは層（sheaf）と呼ばれる概念で整理するときれいにいくが，あまり気にする必要はない．）

9.3 構成問題の解法（解説）

解くべき式は $\delta_0\pi_s = -Q_s$ であったから π_s を $\pi_s = \pi_s^+ + \pi_s^-$ のように対称部分と歪対称部分に分けて別々に解くことを考えよう．

σ_3 を写像 $T : V^3 \to V$ の変数の順番を入れ換える記号 $(\sigma_3 T)(f,g,h) = T(h,g,f)$ とし，ていねいに書き出してみれば次式がわかる：

$$\begin{cases} 2\delta_0\pi_s^+ = (1-\sigma_3)\delta_0\pi_s = -(1-\sigma_3)Q_s, \\ 2\delta_0\pi_s^- = (1+\sigma_3)\delta_0\pi_s = -(1+\sigma_3)Q_s. \end{cases} \tag{9.13}$$

同様，変数を巡回的に入れ換える $(\mathfrak{c}_3 T)(f,g,h) = T(g,h,f)$ という記号を用い，さらに第 2 変数に関するホッシルト余境界作用素を

$$(\partial_2\varpi)(f,g,h) = g\varpi(f,h) - \varpi(f,gh) + \varpi(f,g)h$$

と定義しておくと，

$$(1-\mathfrak{c}_3)\partial_2\pi_s^+ = -\delta_0\pi_s^+, \quad (1+\mathfrak{c}_3)\partial_2\pi_s^- = -\delta_0\pi_s^-$$

となり，$(1-\mathfrak{c}_3+\mathfrak{c}_3^2)(1+\mathfrak{c}_3) = 2$ を使うと解くべき式は次の 2 つに分解する：

$$\begin{cases} \partial_2\pi_s^- = \dfrac{1}{4}(1-\mathfrak{c}_3+\mathfrak{c}_3^2)(1+\sigma_3)Q_s, \\ (1-\mathfrak{c}_3)\partial_2\pi_s^+ = \dfrac{1}{2}(1-\sigma_3)Q_s. \end{cases} \tag{9.14}$$

第 2 式を見ると，$(1+\mathfrak{c}_3+\mathfrak{c}_3^2)(1-\mathfrak{c}_3)=0$ だから，$(1+\mathfrak{c}_3+\mathfrak{c}_3^2)(1-\sigma_3)Q_s=0$ が新しい可解条件のように見えるが，詳しく計算すると，

$$(1+\mathfrak{c}_3+\mathfrak{c}_3^2)(1-\sigma_3)Q_s=4R_s \quad \text{([22] §XIII, Lemma 5.10 参照)}$$

であるから可解条件はやはり $R_s=0$ である．

第 1 式の左辺の $(\partial_2\pi_s^-)(f,g,h)$ は $\pi_s^-(f,g)=\varpi_f(g)$ のように第 1 変数を固定して考えたときの $(\delta_0\varpi_f)(g,h)$ だから当然 $\delta_0^2=0$ からくる可解条件があるが，これも詳しく計算すると，$\delta_0 Q_s=0$ を満たすならば十分であることがわかる（[22] Appendix II (A) 参照）．したがって，s-段目の構成問題とは，$R_s=0$ の仮定のもとで (9.14) 式を解くことである．

これを解くことは簡単ではないが，交代条件 $\pi_k(f,g)=(-1)^k\pi_k(g,f)$ があると，$\pi_{2\ell}^-=0=\pi_{2\ell+1}^-$ ということを使って (9.14) 式の右辺を書いてみれば次がわかる．

補題 9.8 $R_s=0$ がわかっているものとして，$\pi_0,\pi_1,\cdots,\pi_{s-1}$ が交代条件 $\pi_k(f,g)=(-1)^k\pi_k(g,f)$ を満たすとすると，s が奇数ならば $\pi_s^+=0$, s が偶数ならば $\pi_s^-=0$ は (9.14) 式の解である．つまり，構成すべき π_s も交代条件を満たすようにできる．

9.3.1 障害定理

次の定理は以下の話の中で基礎的な役割を務めるものであるが証明は長くなるのでここでは行なわない．[38] または [22] Appendix を参照してもらいたい．また，詳しい計算はしていないが，この定理は $B=(\mathcal{F}_U^*;\circ)$ の場合でも成立しているようである．

定理 9.3（障害定理） $B=C^\infty(U)$ で (B,π_0,π_1) がポアソン代数であり，π_2, $\cdots$, $\pi_{s-1}\in \mathrm{C}^2(B)$ が $0\le m\le s-1$ で $\pi_m(1,*)=\pi_m(*,1)=0$, および (9.1) 式を満たすように与えられているものとする $(s>1)$．

このとき $R_s=0$ であれば，π_s で $\pi_s(1,*)=\pi_s(*,1)=0$, $\pi_s(x^i,x^j)=0$ $(1\le i,j\le n)$ であり，π_0, π_1, $\cdots$, π_s が $0\le\forall l\le s$ で $\sum_{i+j=l}\delta_i\pi_j=0$ を満たすようなもの（(9.1) 式の (E_s) を満たすということ）が構成できる．

さらに，π_2, $\cdots$, π_{s-1} が双微分作用素であるならば，上の π_s も双微分作用素として構成できる．

また $\pi_1(x^i,x^j), \pi_2(x^i,x^j), \cdots, \pi_{s-1}(x^i,x^j)$ がすべて多項式ならば $\pi_s(x^i,x^j)$ も多項式として構成できる．

$R_s = 0$ が（$\pi_1, \cdots, \pi_{s-1}$ を変えずに）π_s がつくれるための必要条件であったことを思い出してもらいたい．補題 9.8 により $0 \leq k \leq s-1$ に対して $\pi_k(f,g) = (-1)^k \pi_k(g,f)$ が成り立つならば π_s も $\pi_s(f,g) = (-1)^s \pi_s(g,f)$ が成り立つように構成できる．

多様体上での構成は，まず局所座標近傍上で π_s を構成し，それから 1 の分解を使ってこれらを貼り合わせるのだが，貼り合わせは何の障害もなく行なわれる．次の補題が成立することは，$\delta_0 \sum_\alpha \phi_\alpha \pi_s^{(\alpha)} = \sum_\alpha \phi_\alpha \delta_0 \pi_s^{(\alpha)}$ が成立すること，および Q_s が多様体の局所座標系とは無関係に定義されていることから明らかであろう．

補題 9.9　$\{U_\alpha\}_\alpha$ を M の局所有限な開被覆とし，ϕ_α をこれに従属する 1 の分解とする．各 U_α 上で π_s が $\delta_0 \pi_s^{(\alpha)} = -Q_s|U_\alpha$ を満たすように構成されれば，$\pi_s = \sum_\alpha \phi_\alpha \pi_s^{(\alpha)}$ は $\delta_0 \pi_s = -Q_s$ を満たす．

上の証明法の副産物として次の定理も得られる．

定理 9.4　ヤコビ環 $(C^\infty(N), \cdot, \xi_0, \{\ ,\ \})$ が量子化可能なのは対応するポアソン代数 $(C^\infty(N \times \mathbb{R}_+); \cdot, \{\ ,\ \}_L)$ が量子化可能のときでありそのときに限る．ただし $\{\ ,\ \}_L$ は次のものである：

$$\{f,g\}_L = r^{-1}\{f,g\} + \partial_r f \xi_0 g - \xi_0 f \partial_r g, \quad f,g \in C^\infty(N \times \mathbb{R}_+).$$

9.3.2　障害が消える場合

座標近傍上で構成していくとその過程で $R_s = 0$ がわかる例をあげよう．

補題 9.10　U の座標関数 $x_1, \cdots, x_n$ について $\{x_i, x_j\} = c_{ij} + \sum_k c_{ij}^k x_k$ の場合には $B = C^\infty(U)$ で，$2 \leq m \leq s-1$ で

$$\pi_m(1,*) = \pi_m(*,1) = 0, \quad \pi_m(x^i,x^j) = 0, \quad 1 \leq i,j \leq n$$

となるように構成していけば $R_s = 0$ となる．

証明　$2 \leq k \leq m-1$ で $\pi_k(x_i,x_j) = 0$ を与えるから，

$$R_m(x_i,x_j,x_k) = \mathop{\mathfrak{S}}_{(i,j,k)} \pi_{m-1}(x_i, \pi_1(x_j,x_k)) = 0$$

となることを使う．R_m は 3-重微分なのでこれが生成元のところで消えるならば $R_m = 0$ である．（証明終わり）

系 9.3　例 4.1 で与えたポアソン環は量子化可能である．つまり $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\mu]]$ に $*$-積が定義され，μ の 1 次の項に例 4.1 で扱ったポアソン積が現われる．

実態

コホモロジー群というとかなり基礎的な安定したものというイメージがあるから，R_s が $PH^3(B)$ の中で 0 以外の元を指定してしまったら，手前のほうをいくら変えても 0 にはできないように思いがちであるが，事実は違うということを Kontsevich[15] が証明したのである．
彼の証明法はここで述べてきたような方法とはまったく違うのだが，以下で述べる方法でポアソン環（無限次元）の普遍展開環を構成し（[34] 参照），それを局所生成元のところで精密に読み直しても証明できるように思える．

系 9.3 で量子化された代数と以下で定義する普遍展開環とはよく似ているのだが μ の取り扱いが微妙に違っているので，その関係を考えておこう．

定義 9.3　結合代数 $(\mathfrak{a}, *)$ が $\mathfrak{g}$ の展開環であるとは，$(\mathfrak{a}, *)$ の交換子 $[a,b]_* = a{*}b - b{*}a$ でつくったリー代数 $(\mathfrak{a}, [\ ,\ ]_*)$ がリー代数として $\mathfrak{g}$ と同型になる場合をいう．展開環は唯一とは限らないが，展開環のうち最も大きいもの，つまりどんな展開環もそこからの準同型像で得られるようなものを**普遍展開環** (universal enveloping algebra) という．$\mathfrak{g}$ が有限次元ならば普遍展開環は線形基底を $x_1, \cdots, x_n$, 構造定数を C_{ij}^k としたとき，$x_1, \cdots, x_n$ で生成される自由テンソル代数を $x_i * x_j - x_j * x_i - \sum_k C_{ij}^k x_k$ で生成される両側イデアルで割れば（商空間をつくれば）よい（2.2.4 項参照）．

μ の取り扱いを少し注意すれば，普遍展開環は例 4.1 で与えたポアソン環の量子化だと考えてよいわけである．

系 9.3 で得られた代数は次のようになっている．

【例 9.1】（例 4.1 参照）　記号は例 4.1 と同様とし，$\mathfrak{g}$ の線形基底 $X_1, \cdots, X_n$ を $\mathfrak{g}^*$ の座標関数と思う．$\forall f, g \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ に対し $f{*}g$ が定義されており

$$f{*}g = fg + \frac{1}{2}\mu\{f,g\} + \mu^2\pi_2(f,g) + \cdots$$

となる．これは $X_1, \cdots, X_n$ と文字 μ とを生成元とし，基本交換関係を

$$X_i * X_j - X_j * X_i = \mu * \sum C_{ij}^k X_k, \quad [\mu, X_i]_* = 0$$

とした代数（有限和だけを考えている）を部分代数として含んでいる．この代数で $x_i = \mu X_i$ $(i = 1, \cdots, n)$ とおけば定義どおりの普遍展開環となる．

これでわかるように $C^\infty(\mathfrak{g}^*)[[\mu]]$ は普遍展開環を含んでいるとはいえ $\mathfrak{g}$ の元はすべて $\frac{1}{\mu}x$ のように書かれていると考えていて，こうすると構造定数に μ がかけられるのでそのぶん非可換性を弱めて見るようにしているのである．

また，$\frac{1}{\mu}\mathcal{O}$ は自然にリー代数となるが，$\mathcal{O}$ 自身をリー環の展開環として見ているのはではなく，$\frac{1}{\mu}\mathcal{O}$ の展開環のほうを考えようとしていることがわかる．すると自己共役性の問題を考えるためには $\frac{1}{\mu}\mathcal{O}$ が生成する "リー群" にあたるものを考えなければならないわけである．

【例 9.2】　$\mathfrak{g}$ が $SO(3)$ のリー環のとき

$$x = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad z = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であり，これの展開環が全行列環 $M(3;\mathbb{C})$ となることは容易にわかるが，$x = \frac{1}{\hbar i}X$, $y = \frac{1}{\hbar i}Y$, $z = \frac{1}{\hbar i}Z$ だと考えると

$$[\frac{1}{\hbar i}X, \frac{1}{\hbar i}Y] = \frac{1}{\hbar i}Z, \quad [\frac{1}{\hbar i}Y, \frac{1}{\hbar i}Z] = \frac{1}{\hbar i}X, \quad [\frac{1}{\hbar i}Z, \frac{1}{\hbar i}X] = \frac{1}{\hbar i}Y$$

だから $[X, Y] = \hbar i Z$, $[Y, Z] = \hbar i X$, $[Z, X] = \hbar i Y$ となる．そこで $X = i\hbar x$, $Y = i\hbar y$, $Z = i\hbar z$, $\hbar i$ のみを用い（$\frac{1}{\hbar i}$ を使わないで）展開環をつくると，各成分 c_{ij} が

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{bmatrix}$$

$\hbar$ の 1 次から始まる多項式（0-次項なし）となるが，$\hbar$ の 1 次から始まる元は X, Y, Z の 1 次結合のみであるから，全体を $i\hbar$ で割っても行列環 $M(3;\mathbb{C})$ は得られていないことがわかる．

上の例から考えると，行列群に相当するのは $\exp(\frac{1}{\mu}\mathcal{O})$ のような部分ということになるが，これが行列環のときのように $\frac{1}{\mu}\mathcal{O}$ の展開環の中に実現されるとは一般には期待できない（第 7 章の $*$-指数関数を考えてみよ）．せいぜい $\frac{1}{\mu}\mathcal{O}$ をリー環に持つ（無限次元の）リー群の存在が期待できるだけであろう．

9.3.3 μ-制御代数の真空表現

Kontsevich の結果と定理 9.4 をあわせて考えると 4.3.3 項で述べた量子化の問題はほとんど解決されたと見てよいであろう．しかしこれは $\mu=0$ の周りでの級数展開を求めたにすぎない．6.4.3 項や，注意 8.4，8.5 でわかるように μ が有限のところまでわからないときちんとしたことは何も言えないのである．

この章でこれまで考えてきたのはおもに μ の冪で展開したときの係数の話である．こういうものが構成できなければ話は始まらないことは確かであるが，これができても話は終わったわけではない．$\mathcal{O}$ は最後には作用素表現を与えて作用素の代数にしないと物理理論とはみなされないものであった．そこでどのようになっていれば作用素表現を付けられるかをこれまでに出てきた例，とくに擬微分作用素環の例（定理 8.4 参照）をモデルにして考えてみよう．

まず，線形作用素としての表現をつくるだけでよいのならば**正則表現**という一般的なつくり方があることを注意しよう．

μ-制御代数 $\mathcal{O}$ の元 $\varpi_{\mathcal{O}}$ が $\varpi_{\mathcal{O}}*\varpi_{\mathcal{O}}=\varpi_{\mathcal{O}}$ を満たすとき**冪等元**と呼ぶ．$\varpi_{\mathcal{O}}=1$ でもよいのでこのようなものは存在はしているが一意的ではない．これが与えられているものとする．$\mathcal{L}=\{f\in\mathcal{O};\ f*\varpi_{\mathcal{O}}=0\}$ とすると $\varpi_{\mathcal{O}}$ を右からかける演算は連続だから $\mathcal{L}$ は閉部分空間であり，左イデアルでもある．商空間 $\boldsymbol{E}=\mathcal{O}/\mathcal{L}$ は σ-フレシェ空間となる．$\mathcal{O}*\varpi_{\mathcal{O}}=\boldsymbol{E}*\varpi_{\mathcal{O}}$ と書いてよいであろう．$\forall a\in\mathcal{O}$ についてこれを $f*\varpi_{\mathcal{O}}\to a*f*\varpi_{\mathcal{O}}$ という $\boldsymbol{E}*\varpi_{\mathcal{O}}$ から $\boldsymbol{E}*\varpi_{\mathcal{O}}$ への作用素と思うことができるのでそう思ったものを $L_a:\boldsymbol{E}*\varpi_{\mathcal{O}}\to\boldsymbol{E}*\varpi_{\mathcal{O}}$ と書く．つまり $a*f*\varpi_{\mathcal{O}}=L_a(f)*\varpi_{\mathcal{O}}$ である．L は $\mathcal{O}$ から $\boldsymbol{E}*\varpi_{\mathcal{O}}$ 上の作用素の空間への準同型，つまり $L_aL_b(f)=L_{a*b}(f)$ が成立することは明らかであろう．これを**左正則表現**と呼ぶ．

以下では，$L_a=0\Leftrightarrow a=0$ が成立する（左正則表現が忠実）とする．$\mathcal{O}$ が表現されるだけでよいのならばこれで十分であろうが，表現空間 $\boldsymbol{E}*\varpi_{\mathcal{O}}$ の中には μ は現れないようにしたい，つまり μ 自身も作用素表現されていてほしいのである．これは $\frac{1}{\mu}\mathcal{O}$ の展開環のようなものまで考えたいからである．

そこで上の冪零元について次の要求をする：

仮定 1（真空に関するもの）

$$\mu*\varpi_{\mathcal{O}}=i\varpi_{\mathcal{O}}=\varpi_{\mathcal{O}}*\mu.$$

μ-制御代数では形式的に μ^{-1} を考えてよかったから，左の式は $i\mu^{-1}*\varpi_{\mathcal{O}}=\varpi_{\mathcal{O}}$ と書いてよい．

$\mathcal{O} = B \oplus \mu{*}\mathcal{O}$ であり，$\mu{*}\mathcal{O} = \mathcal{O}{*}\mu$ は真閉部分空間であるのに，この仮定のもとでは $\mathcal{O}{*}\varpi_{\mathcal{O}} = \mu{*}\mathcal{O}{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ である．これより $\mu{*} : \boldsymbol{E}{*}\varpi_{\mathcal{O}} \to \boldsymbol{E}{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ は全単射連続で，閉グラフ定理より $\mu^{-1}{*}$ も連続となり，$\mu{*}$ は $\boldsymbol{E}{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ から $\boldsymbol{E}{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ 自身への線形同型となる．

$\mu * \varpi_{\mathcal{O}} = i\varpi_{\mathcal{O}}$ であるから，$\varpi_{\mathcal{O}} \in \bigcap_k \mu^k{*}\mathcal{O} = \mathcal{O}_\infty$ である．位相線形空間としては $\mathcal{O}{*}\varpi_{\mathcal{O}} = \mu{*}\mathcal{O}{*}\varpi_{\mathcal{O}} = \mathcal{O}_\infty{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ である（したがって，$\mathcal{O}_\infty = \{0\}$ となる準解析的 μ-制御代数ではこのような表現空間はない）．

$\mathrm{ad}(\mu^{-1})\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ である．したがって $\mathrm{ad}(\mu^{-1})$ は自然に $\boldsymbol{E}{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ から自分自身への線形写像を引き起こす．これを $\widetilde{\mathrm{ad}}(\mu^{-1})$ と書くことにする．

これまでは共役作用素という概念を使ってこなかったが，ヒルベルト空間を考えるためには μ-制御代数 $\mathcal{O}$ の上に次の性質を持った反自己同型写像 $a \to a^*$ が定義されている必要がある（包合的反自己同型と呼ぶ）：

$$(a{*}b)^* = b^*{*}a^*,\ (a^*)^* = a,\ \mu^* = -\mu,\ i^* = -i. \tag{9.15}$$

このような写像はいつでもあるとは限らないし，あっても一意的ではない．

次の仮定はかなり強い：

仮定 2

$\varpi_{\mathcal{O}}^* = \varpi_{\mathcal{O}}$ であり，$\varpi_{\mathcal{O}}{*}\mathcal{O}{*}\varpi_{\mathcal{O}} = \mathbb{C}\varpi_{\mathcal{O}}$ であり，

$$\langle f, g\rangle_0 \varpi_{\mathcal{O}} = \varpi_{\mathcal{O}}{*}f^*{*}g{*}\varpi_{\mathcal{O}} \tag{9.16}$$

と定義すると $\langle f, g\rangle_0$ は $\boldsymbol{E}{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ 上の正定値エルミート形式となる．

これまで使われてきた真空はどれも $\varpi_{00} * f * \varpi_{00} = a * \varpi_{00}, a \in \mathbb{C}$ だったことを考えると，上の仮定は自然なものであろう．

注意 9.1 命題 6.4 に現れた真空のように，上のようなエルミート的な真空の例は多い．しかしどんな $\mathcal{O}$ にも上のような $\varpi_{\mathcal{O}}$ が見つかるわけではなく，これを見つけるためには $\mathcal{O}$ に対し次章で述べる“局所化”のようなことを行なって，局所化ごとにしか $\varpi_{\mathcal{O}}$ を見つけられないといったことが起こる．この場合，局所的につくられた $\varpi_{\mathcal{O}}$ を貼り合わせて考える必要があるが，第 11 章でわかるように，この貼り合わせには一般には齟齬が生じてしまうのである（こういう場合の処方箋はまだできていない）．

また，$\langle f,g\rangle_0=\varpi_{\mathcal{O}}*f^**g*\varpi_{\mathcal{O}}$ は必ずしも正定値と限る必要はないが，その場合にもヒルベルト空間をつくらねばならないから $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}_+\oplus\boldsymbol{E}_-$ のように正の部分と負の部分とに分解してもう少しデリケートな議論をする必要がある．

$\|f\|_0^2=\langle f,f\rangle_0$ とし，このノルムで $\boldsymbol{E}$ を完備化してできるヒルベルト空間を E^0 とする．(9.15) 式の仮定より $\langle\mu*f,g\rangle_0=-\langle f,\mu*g\rangle_0$ である．

仮定 3

$\forall a\in\mathcal{O}$ で，L_a は E^0 から E^0 への有界（連続）作用素に拡張される．

以下では（記号がうるさくなるので）$L_{\mu^{-1}}$ をたんに $\mu^{-1}*$ と書くことにする．

ILH-鎖の構成

上の状況では正定数 c があって $\forall a\in\mathcal{O}$ に対して $\|\mu^{-1}*a\|_0\geq c\|a\|_0$ が成立しているが，これまでの例で考えると $\mu^{-1}*$ は必ずしも連続（有界ともいう）作用素ではないので，以下でもその場合を念頭において話をする．

$\|f\|_1^2=\langle i\mu^{-1}*f,i\mu^{-1}*f\rangle_0$ とし，このノルムで $\boldsymbol{E}$ を完備化してできるヒルベルト空間を定理 8.1 を参考にして E^1 とする．つくり方より，$i\mu^{-1}*$ は E^1 から E^0 の上への等長変換に自然に拡張される．第 8 章でやったように $E^k=\mu^k*E^0$，$\widetilde{\boldsymbol{E}}=\bigcap_k E^k$ と定義すると両側-ILH-鎖 $\{\widetilde{\boldsymbol{E}},E^k,k\in\mathbb{Z}\}$ が得られ，作用素に階数の概念が設定できる．$\mu^{-k}*\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}$ だから $\boldsymbol{E}\subset\widetilde{\boldsymbol{E}}$ である．

$L(E^0)$ を E^0 上の連続（有界）線形写像の全体とする．左正則表現は忠実としていたから，仮定 3 より $\mathcal{O}\subset L(E^0)$ である．

$A\in L(E^0)$ に対し $\mu^{-1}*A-A*\mu^{-1}$ を $\mathrm{ad}(\mu^{-1})A$ のように書く．$L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$ を $\forall n\in\mathbb{N}$ で $\mathrm{ad}(\mu^{-1})^nA\in L(E^0)$ となる $A\in L(E^0)$ の全体とする．

次のことは $\mathrm{ad}(\mu^{-1})^k\mathcal{O}=\mathcal{O}$ であるから明らかであろう．

定理 9.5　$\mathcal{O}$ は自然に $L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$ の部分代数に左正則表現される．

$\mathcal{O}$ の左正則表現像を $M_{\mathcal{O}}=\{L_a;a\in\mathcal{O}\}$ とする．$M_{\mathcal{O}}\subset L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$ であるが，$M_{\mathcal{O}}$ が（$L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$ に自然に入る作用素を使って定義する位相に関して）閉じているかどうかなどは一般にはわからない．

$L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$ はかなり質のよい代数である．まず帰納法により次の恒等式が容易にわかる：

$$\mathrm{ad}(\mu^{-1})^k(AB) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \mathrm{ad}(\mu^{-1})^i A\, \mathrm{ad}(\mu^{-1})^{k-i} B.$$

これより $L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$ は $\mathbb{C}$ 上の非可換代数をなしており，かつ作用素のノルム系 $\{\|\mathrm{ad}(\mu^{-1})^k A\|_0\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ により位相代数となることもわかる．

さらに次のようなこともわかる．

定理 9.6 $\forall A \in L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$ に対し $k(\in \mathbb{Z})$ ごとに決まる正定数 D_k があって

$$\|Au\|_k \le \|A\|_0 \|u\|_k + D_k \|u\|_{k-1},\ k \in \mathbb{Z}\ \text{（正規 ILH 写像ということ）}$$

が成立する．

さらに $L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$ は A に，その双対作用素 A^* を対応させる写像（共役作用素）$A \to A^*$ を持った位相代数である．$A \in L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}}) \Longleftrightarrow A^* \in L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$.

証明 $Ad(\mu^{-1})A = \mu^{-1}A\mu$ とすると数学的帰納法で $\forall n \in \mathbb{N}_0$ に対し $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ 上の次の等式がわかる：

$$Ad(\mu^{-1})^n A = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (\mathrm{ad}(\mu^{-1})^i A)(\mu^{-1})^{-i},$$

$$Ad(\mu)^n A = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} \mu^i (\mathrm{ad}(\mu^{-1})^i A).$$

しかも，$A \in L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$ ならば $A^*, \mathrm{ad}(\mu^{-1})^k A$ も $L_\mu(\widetilde{\boldsymbol{E}})$ の元である．

上の不等式を使って $\forall k \in \mathbb{N}_0$ に対し

$$\|Au\|_k \le \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \|(\mathrm{ad}(\mu^{-1})^i A)\|_0 \|\mu^{-(k-i)} u\|_0 \le \|A\|_0 \|u\|_k + D_k \|u\|_{k-1}$$

がわかる．$D_0 = 0$ である．とくに，A, A^* は $\forall k \in \mathbb{N}_0$ で E^k から自身への線形連続写像を誘導するから，双対写像を考えればこのことは $\forall k \in \mathbb{Z}$ についても成立することがわかる．さらに $\mathrm{ad}(\mu^{-1})^i A$ についても $i \in \mathbb{Z}$ について同様の不等式が成立する．上の不等式を使って

$$\begin{aligned}\|Au\|_{-k} = \|\mu^k A u\|_0 &\le \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \|\mu^i (\mathrm{ad}(\mu^{-1})^i A) \mu^k u\|_0 \\ &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \|(\mathrm{ad}(\mu^{-1})^i A)\mu^k u\|_{-i} \le \|A\|_0 \|u\|_{-k} + D_{-k} \|u\|_{-k-1}.\end{aligned}$$

（証明終わり）

次の不等式は容易であろう：

$$\|AB\|_k \leq \|A\|_0\|B\|_k + \|A\|_k\|B\|_0 + 2^k\{\|A\|_{k-1}\|B\|_{k-1}\}.$$

ただし $\|A\|_k = \sum_{0\leq i\leq k} \|\mathrm{ad}(\mu^{-1})^i A\|_0$ である．

注意 9.2　ここまでくると作用素のほうから $\mathcal{O}$ をしぼりこんで μ-制御代数を書きたくなるであろうが，まだかなりのギャップがあって，作用素の言葉だけで μ-制御代数を書くことはできていない．

$e_*^{t\mu^{-1}}$ の存在

μ^{-1} そのものは代数の外側の元であるが，これが作用素表現されるとかなり自由に代数の中に取り込んで考えられる．以下では次の仮定をする：

仮定 4

$\mathcal{O}$ 上で考えた微分方程式 $\frac{d}{dt}f_t = [\mu^{-1}, f_t]_*$ は任意の初期値 $f_0 = f \in \mathcal{O}$ に対して $\forall t \in \mathbb{R}$ で実解析的解を持つ．

注意 9.3　虫のよい仮定に見えるかもしれないが，これがもっとも実際的である．この仮定は特性ベクトル場が完備であるということも含んでいる．

μ-制御代数の μ は $\mu \to \mu + a\mu^2 + \cdots$ のように置き換えても制御子の役目をするから，実際にこの仮定を検証するには多様体上で段階的に検証するのである．

また $\dim \mathcal{O} = \infty$ の場合には μ が形式的変数であっても $t \in \mathbb{C}$ とする複素 1 径数群の存在は期待できない（[22], p.169, Theorem 4.3 参照）．

この解を $e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1})} : \mathcal{O} \to \mathcal{O}$ と書く．これは 1 径数自己同型群である．

$\mathrm{ad}(\mu^{-1})\mathcal{L} \subset \mathcal{L}$ であり，$\mathcal{L}$ は閉集合だから，t に関する実解析性の仮定より $e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1})}\mathcal{L} = \mathcal{L}$ となり，これより $e^{t\mathrm{ad}(\mu^{-1})}$ は自然に $\boldsymbol{E}{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ から自分自身への線形同型の 1 径数群を引き起こす．これを $e^{t\widetilde{\mathrm{ad}}(\mu^{-1})}$ と書くことにする．

$\mu^{-1} * f{*}\varpi_{\mathcal{O}} = (\widetilde{\mathrm{ad}}(\mu^{-1})f + if){*}\varpi_{\mathcal{O}}$ が成立するので，次の補題は容易であろう．

補題 9.11　$f_t = e^{it}e^{t\widetilde{\mathrm{ad}}(\mu^{-1})}f{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ は $\frac{d}{dt}f_t{*}\varpi_{\mathcal{O}} = \mu^{-1}{*}f_t{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ を満たす．

これより $e_*^{t\mu^{-1}}{*}f{*}\varpi_{\mathcal{O}} = e^{it}e^{t\widetilde{\mathrm{ad}}(\mu^{-1})}f{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ とおいて $e_*^{t\mu^{-1}}$ が $\boldsymbol{E}{*}\varpi_{\mathcal{O}}$ に働く

作用素として定義される．$\frac{d}{dt}\langle e_*^{t\mu^{-1}} f,\ e_*^{t\mu^{-1}} g\rangle_0 = 0$ がわかるので仮定 4 のもとでは，$e^{t\mu^{-1}*} : E^0 \to E^0$ はユニタリ作用素の 1 径数群として拡張される．ストーンの定理 3.2 より $i\mu^{-1}*$ は自己共役作用素となる．フリードリスクの拡張定理 8.1 のときのように $i\mu^{-1}$ が半有界と仮定しなくてすむのである．

$\mu * e_*^{t\mu^{-1}} = e_*^{t\mu^{-1}} * \mu$ だから $e_*^{t\mu^{-1}}$ は各 $k \in \mathbb{Z}$ に対し E^k 上の線形同型となる．しかし，$k \neq 0$ の場合は一般にユニタリ作用素ではない．

系 9.4 $\quad e_*^{t\mu^{-1}} L_a e_*^{-t\mu^{-1}} = e^{t\,\mathrm{ad}(\mu^{-1})} L_a = L_{e^{t\,\mathrm{ad}(\mu^{-1})}(a)}$.

注意 9.4 (M, g) を境界のない C^∞-コンパクトリーマン多様体とし，Δ を M 上のラプラシアンとする．上の $i\mu^{-1} : \boldsymbol{E}*\varpi_{\mathcal{O}} \to \boldsymbol{E}*\varpi_{\mathcal{O}}$ は半有界とする必要はなかったが，これまでの実例では $\sqrt{1+\Delta}$ のような半有界の形で与えられていた．

$$0 = \lambda_0 \leq \lambda_1 \leq \cdots \leq \lambda_m \leq \cdots$$

等号がついているのは重複度も入れているためである．

を Δ の固有値の列とする．これについては増大度を示す定理として $\forall s \geq \dim M$ について $\sum_{m=0}^{\infty} \lambda_m^{-s} < \infty$ となることが知られている．

ILH-鎖に関連した細かい注意をしておこう．e_m を固有値 λ_m に対応する固有関数とする．$\forall k \in \mathbb{Z}$ に対して

$$E^k(M) = \{f = \sum_{m\in\mathbb{Z}} a_m e_m;\ a_m \in \mathbb{C}, \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2(1+\lambda_m)^{2k} < \infty\}$$

とすると，$E^k(M)$ は $\forall k \in \mathbb{Z}$ に対してヒルベルト空間でありノルムは

$$\|f\|_k^2 = \sum_{m\in\mathbb{Z}} |a_m|^2(1+\lambda_m)^{2k}$$

で与えられる．$E^0(M)$ は 2 乗可積分な関数全体の空間であり $\bigcap_{k\in\mathbb{Z}} E^k(M)$ は C^∞-関数全体のなす空間 $C^\infty(M)$ であることが知られている（ソボレフの補題と呼ばれる）．$\{C^\infty(M), E^k(M); k \in \mathbb{Z}\}$ は**ソボレフ鎖**と呼ばれる ILH-鎖である．$\forall k \in \mathbb{Z}$ で E^{-k} は E^k の双対空間である．しかし，上の例の ILH-鎖は多様体 M の位相的性質をあまり反映していないことが次の定理でわかる．

定理 9.7 $\quad \dim M = \dim M'$ であれば線形同型 $\psi : C^\infty(M) \to C^\infty(M')$ で $\forall k \in \mathbb{Z}$ について ψ は $E^k(M)$ から $E^k(M')$ の上への線形同型に拡張でき，しかも $\psi : E^0(M) \to E^0(M')$ は等長変換，すなわち $\forall f \in E^0(M)$ に対して $\|\psi(f)\|_0 = \|f\|_0$ が成立する．

この線形同型は固有関数どうしの対応を与えてつくる．この定理は固有値の増大度が次元 $\dim M$ にしかよらないことを基礎にしている．したがって上の線形同型は M とか M' の点描像とは無関係である．

$\frac{1}{\mu}\mathcal{O}$ は交換子積に関して（$\mathbb{C}$ 係数の）リー代数になるが，2 次の $*$-指数関数を思い出せば，一般に $\exp_*\left(\frac{1}{\mu}a\right)$ が定義できるとは考えられないから，$a \in \mathcal{O}$ で $a^* = a$ のときに限定すべきであるが，リー群のようなものが構成できたとしても全体としては 7.2 節で述べたような曖昧被覆群にしかならない可能性もある．しかし，リー群と何の関係も持たないリー代数というのは不自然だから，量子論を含むような大枠の理論を考えるときには $\mathcal{O}$ の中に実部分環 $\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ で $\mathcal{O}_{\mathbb{R}} \otimes \mathbb{C} = \mathcal{O}$ を満たすものがあり，リー環 $\frac{1}{\mu}\mathcal{O}_{\mathbb{R}}$ は汎リー群または，その曖昧被覆群を生成すると要求してしまってその表現論を考えるほうが実際的であろう．そのほうが，関数解析の難しさを避けられるし，そのように考えてしまっても，量子論の本質は何も変わらないと思われるのである．

汎リー群，曖昧被覆群などの定義は後の章になるが，ここでは一応 “群” のようなものと漠然と理解していてよい．曖昧被覆群のようなものをどのように数学の中に定着させるかは，この概念が新しいので，はっきりしたことはわからない．

第10章　ワイル的世界

前章まででさまざまな微分幾何的構造が非可換結合代数の μ の冪展開の中に含まれることを観察した．そして量子化の問題を μ-制御代数の構成の問題および真空表現の問題として捉え直した．これまでさまざまな μ-制御代数の例も見たのであるが，具体的な例には多様体に直接結び付く例はあまりなかった．この章では μ はおもに，中心に属する形式的変数として扱われるが，多様体上でのポアソン代数の量子化の問題を考える．

10.1　局所化定理と量子ダルブーの定理

次の定理は結合代数の範疇での可換代数 $C^\infty(M)$ の形式的デフォルメは M の開集合に制限して考えてもよいことを意味する．

定理 10.1（局所化可能定理）　$(C^\infty(M)[[\mu]];*)$ が 4.3 節の (A.1)–(A.3) を満たす μ-制御代数のとき，$C^\infty(M)[[\mu]]$ のフィルタリングを次のような形で与えられる線形写像 $L: B \to C^\infty(M)[[\mu]]$

$$L(f) = f + \mu^2 L_2(f) + \mu^3 L_3(f) + \cdots, \quad f \in B$$

を使って変更し $*$-積の表示を変えると $f, g \in B$ に対する表示

$$\begin{aligned} f * g =& fg + \frac{\mu}{2}\{f,g\} + \cdots + \mu^m \varpi_m(f,g) + \cdots, \\ [\mu^{-1}, f] =& \xi_0(f) + \mu\xi_1(f) + \cdots + \mu^m \xi_m(f) + \cdots \end{aligned}$$

において各 ϖ_m が双微分作用素，各 ξ_m が線形微分作用素になるようにできる．

証明　命題 4.3 を使えば μ が中心 (center) の場合に証明できればよいことがわかるので，π_m についてのみ証明する．

$m=0,1$ のところは $2m$-次の双微分作用素であるから

$$f*g = fg + \frac{\mu}{2}\{f,g\} + \mu^2\varpi'_2(f,g) + \cdots + \mu^m\varpi'_m(f,g) + \cdots$$

としたとき，$\varpi'_2,\ldots,\varpi'_{m-1}$ までが双微分作用素になっていると仮定する．補題 9.4 より $R_m=0$ だから，定理 9.3 より双微分作用素 ϖ_m で (9.1) 式を満たすものがある．ϖ'_m も (9.1) 式の解だから，$\pi'=\varpi'_m-\varpi_m$ はホッホシルト-2-余輪体である．補題 9.1 より $\delta_0\pi'^{\pm}=0$ だから補題 9.1 の後半より π'^{-} は双微分であり，したがって双微分作用素である．定理 9.2 より π'^{+} はホッホシルト-2-余境界だから ξ で $\varpi'_m(f,g)=\varpi_m(f,g)+\pi'^{-}(f,g)+\delta_0\xi(f,g)$ となるものがある．フィルタリングを ξ を使って定義される線形同型 $f\mapsto f-\mu^m\xi(f)$ で変えると，$*$-積の新しい表示は $(1-\mu^m\xi)^{-1}((f-\mu^m\xi(f))*(g-\mu^m\xi(g)))$ を計算して得られるが，新しい表示では余境界部分は消えて双微分作用素 $\varpi_m+\pi'^{-}$ だけが残る．この変形はフィルタリングを変えただけだから $R_s=0$ のような性質には影響がない．この手続きを繰り返す．　　　　（証明終わり）

$\varpi_m(f,g)$ が f,g について双微分作用素ということは

$$\varpi_m(f,g)=\sum_{\alpha,\beta}A_{\alpha\beta}(x)\partial_x^{\alpha}f\partial_x^{\beta}g$$

のような姿に書かれるということであるから，$\varpi_m(f,g)(p)$ を知るには f,g の p の近傍における値がわかるだけで十分である．

$\mathcal{O}$ 上の積 $*$ は $B[[\mu]]$ 上に (4.8) 式で積を定義するが，$B=C^{\infty}(M)$ の場合には局所化可能定理 10.1 により，積 $*$ は M の任意の開部分集合 U での $C^{\infty}(U)[[\mu]]$ に**同じ積の公式**で定義してやることができる．$(C^{\infty}(U)[[\mu]];*)$ は $\mathcal{O}$ の**局所化**と呼ばれる．さらにこの積は U の任意の被覆空間 $\tilde{U}$ にも**同じ積公式**で定義される．また $C_0^{\infty}(U)$ を U 内に台を持つ関数の全体とすると，$C_0^{\infty}(U)[[\mu]]$ は $*$-積に関して $(C^{\infty}(U)[[\mu]];*)$ の両側イデアルとなる．

定理 10.1 では μ を形式的変数とし $C^{\infty}(M)[[\mu]]$ で考えているが，証明を見れば一般の μ-制御代数 $\mathcal{O}$ でも $B=C^{\infty}(M)$ となっていれば，各 $\varpi_m(f,g)$ が双

微分作用素となるようにできることがわかる．しかし一般には $\mathcal{O}_\infty \neq \{0\}$ だから代数が局所化されるわけではない．

局所化するということは代数の元の Spec を変えることを意味する．

上のように局所化された代数では大域的な束縛から開放されたぶんだけ逆元のようなものが見つけやすくなっている．たとえば，M 上では $1/f$ が C^∞ にならなくても，U 上では C^∞ となり，$1/f \in C^\infty(U)[[\mu]]$ といったことが起こる．そのぶん，都合のよい生成元を選びやすくなるのである．しかし，上のような意味で局所化を考えると，これは μ-冪展開の係数しか見ていないのだから，$\mathcal{O}_\infty$ のような部分は扱いようがなくなってしまう．

ところが局所化にはもう 1 つのやり方がある．それは代数幾何で因子 (divisor) と呼んでいるものを使う方法である．**局所化は μ-冪展開の低い階数のところでは，いくつかの逆元を添加するという形で行なうべき**なのであるが，このやり方が確立しているわけではないし，半逆元を持つような $f \in \mathcal{O}$ に逆元 f^{-1} を添加して $\mathcal{O}[f^{-1}]$ を考えると代数は自明なものに崩壊することがあるのでこの方法を使うときにはかなりの注意が要る．

10.1.1 局所生成系

方法はともかく代数を局所的に考えられるようになると，自然に「局所生成元」という考え方も出てくる．局所生成元は多様体の局所座標系に相当するものである．

定義 10.1 μ-制御代数 $\mathcal{O}$ で，$B = C^\infty(M)$ のとき，$\mathcal{O}$ の元 $\xi_1, \cdots, \xi_n$ が U 上の**局所生成系**であるとは

$$\xi_i = x_i + \mu * f_i^{(1)} + \cdots + \mu^k * f_i^{(k)} + \cdots, \quad x_i,\ f_i^{(k)} \in C^\infty(M)$$

と書いたとき，$x_1, \cdots, x_n$ が U の座標関数になっているときをいう．

$\xi_1, \cdots, \xi_n$ **はあたかも座標関数であるかのように**扱うことができる．たとえば C^∞-関数 $f(\boldsymbol{x})$ に対して $f(\boldsymbol{\xi})$ のようなものを考えるには，$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x} + \mu * \boldsymbol{g}$ とおいて，補題 1.5 でやったグラスマン連接と同じ考え方で

$$f^\sharp(\boldsymbol{x} + \mu \boldsymbol{g}) = \sum_{|\alpha| \geq 0} \frac{\mu^{|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_x^\alpha f)(\boldsymbol{x}) \boldsymbol{g}^\alpha \tag{10.1}$$

と定義する．これを**ワイル連接** (Weyl continuation) と呼ぶことにする．

局所生成系の定義の式から $x_i = \xi_i - \mu * f_i^{(1)}(\boldsymbol{x}) + \cdots$ と書いて，補題 1.9 でやったように，逐次代入法とテイラー展開を組み合わせれば $\boldsymbol{x}$ が $\boldsymbol{\xi}$ に関して解けることがわかるだろう．しかし，このときには

$$f(\boldsymbol{\xi} - \mu * \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = \sum_{\alpha} \frac{(-\mu)^{|\alpha|}}{\alpha!}(\partial^\alpha f^\sharp)(\xi)g^\alpha$$

といった計算をしていて，ξ_i のほうが実数値をとる変数であるかのごとく扱われている．このように μ が形式的変数として扱われているところでは $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{\xi}$ とは同格になっているのである．

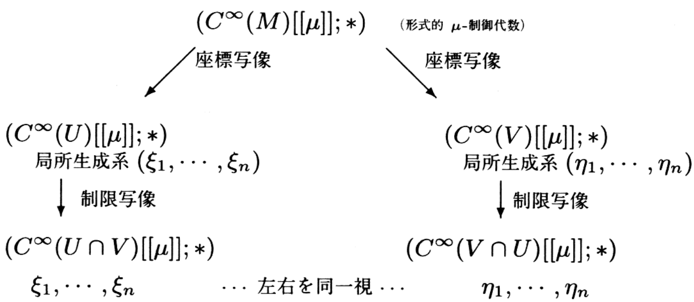
局所化と局所生成系の概念を使うと自然に**座標変換**とか**生成元変換**といった概念が得られる．

可換積の役割

可換積 $\cdot$ はたんに代数の元に一意性のある表示を与えるための補助的役割を負っているだけである．したがって $C^\infty(U)[[\mu]]$ で使われている $\cdot$-積と $C^\infty(V)[[\mu]]$ でのそれとが何の関係もなくても論理的矛盾というわけではない．

$(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ が局所生成系とするとこれは $(C^\infty(U)[[\mu]]; *)$ の稠密な部分代数を生成する．任意の開集合 $V \subset U$ 上でも $(\xi_1, \cdots, \xi_n)$ は $(C^\infty(V)[[\mu]]; *)$ の局所生成系である．上の考察をもとに“座標変換”を定義しよう．

生成元変換の概念は多様体上の座標変換の概念に平行して述べられる．まずは次の図を見てもらいたい：



= (**座標変換の概念図**) =

$\boldsymbol{x}$ の多項式全体と $\boldsymbol{\xi}$ の多項式全体とは結合代数としてはまったく区別がなく同型である．どちらを「実在」と考えても数学的にはまったく等価であるが，μ

が形式的変数でなく，数に置き換わると，片方で書かれた量を他方で読み直したりすると発散してしまうことがある．この考え方はくり込み理論の数学的構造を考えるときに大切である．

$(\xi_1, \cdots, \xi_n)$, $(\eta_1, \cdots, \eta_n)$ をそれぞれ $(C^\infty(U)[[\mu]]; *)$, $(C^\infty(V)[[\mu]]; *)$ の局所生成系とする．すると $(C^\infty(U \cap V)[[\mu]]; *)$ 上での**生成系変換**（座標変換と呼ぶこともある）とはたんに η_i を $\xi_1, \cdots, \xi_n, \mu$ を使って表示したり，逆に ξ_i を $\eta_1, \cdots, \eta_n, \mu$ を使って表示したりすることである．つまり，

$$\eta_i = \Phi_i^{\alpha\beta}(\xi_1, \cdots, \xi_n, \mu), \quad \xi_i = \Psi_i^{\beta\alpha}(\eta_1, \cdots, \eta_n, \mu)$$

のような表示を考えるということである．

この概念により代数 $(C^\infty(M)[[\mu]]; *)$ は "局所化された代数" のパッチワークだと考えることができる．逆に $(C^\infty(M)[[\mu]]; *)$ 自身を局所代数のパッチワークとして定義してしまうことができるわけである．

最後に同型の概念を述べておこう．2 つの μ-制御代数 $(C^\infty(U)[[\mu]]; *)$ と $(C^\infty(V)[[\mu]]; *)$ を考えよう．線形同型写像 $\varphi : C^\infty(U)[[\mu]] \to C^\infty(V)[[\mu]]$ が $*$-積について同型のとき**同型写像**と呼ぶ．同型写像 φ が μ を変えないとき **μ-同型写像**と呼ぶ．

多様体的考え

$\mathcal{O}_\infty = \bigcap_k \mu^k \mathcal{O}$ とすると $\mathcal{O}/\mathcal{O}_\infty$ は（細部にいろいろ問題は残るが）多様体に似た構造を持つのである．しかし，これはもはや第 1 章で述べたものとは違ったものである（点対応になっていないのである）．

$C^\infty(U)[[\mu]]$ も $C^\infty(V)[[\mu]]$ も $C^\infty(U)$, $C^\infty(V)$ 上の普通の可換積を自然に拡張した可換積 $\cdot$ で可換代数にはなっているが，φ が μ-同型写像であっても可換代数 $(C^\infty(U)[[\mu]]; \cdot)$, $(C^\infty(V)[[\mu]]; \cdot)$ 間の同型は**引き起こさないことが多い**ということに注意してもらいたい．

"局所生成元変換" $\eta_i = \Phi_i^{\alpha\beta}(\xi_1, \cdots, \xi_n, \mu)$ によって貼り合っているのは何であろうか？　これはいったい何の変換であろうか？

われわれの思考形式

人間の思考形式はこういう場合，何か“動かされる物”を要求するようである．つきつめてこの問題を考えるとこれは局所生成元変換の“群”が作用する（なるべくなら線形の）空間をつくりだし，その元を“動かされる物”と考えようとしているということがわかる（これは表現論を考えるということである）．

古典的多様体の定義で局所座標変換のところを思い出してみると，変換（貼り合わ）されているのは座標と解釈されている数字の列 $(a_1, \cdots, a_n)$ と別の数字の列（座標）$(b_1, \cdots, b_n)$ である．$\Phi_i^{\alpha\beta}$ が $U \subset \mathbb{R}^n$ 上で定義された実数値関数のときには $(\Phi_1^{\alpha\beta}, \cdots, \Phi_n^{\alpha\beta})$ は U から $\mathbb{R}^n$ への写像と理解できる．これの類似でいうと $(\xi_1, \cdots, \xi_n, \mu)$ と $(\eta_1, \cdots, \eta_n, \mu)$ が貼り合っているといわなければならないように見えるが，$\eta_i = \Phi_i^{\alpha\beta}(\xi_1, \cdots, \xi_n, \mu)$ の ξ_i のところに数を代入することには意味がないから，何か「点」のようなものが貼り合って点集合ができているというわけではない．

局所化された代数では**逆元などがつくりやすいから生成系を選ぶ自由度ははるかに大きくなる**．このため次項で述べる正準局所生成系のような特別なものを局所生成系として選ぶことができる場合がある．しかしここで言っている座標変換は点変換ではないことに注目してもらいたい．

10.1.2 量子化されたダルブーの定理

μ は中心の元とし，μ-制御代数を局所化した $(C^\infty(U)[[\mu]]; *)$ を考えよう．U は $\mathbb{R}^n$ の開球体としておく．$\{f, g\} = \pi_1(f, g) = \pi_1^-(f, g)$ とすると $(C^\infty(U); \cdot, \{\ ,\ \})$ はポアソン代数である．話を簡単にするため，以下では $\{\ ,\ \}$ の階数は一定 $2r (\leq n)$ とする．

古典的ダルブーの定理 3.1 により，U の座標関数 $x^1, \cdots, x^r, y_1, \cdots, y_r, z_1, \cdots, z_s$, $2r + s = n$ で

$$\{x^i, y_j\} = \delta_j^i, \quad \{x^i, x^j\} = 0 = \{y_i, y_j\} = \{z_i, x^j\} = \{z_i, y_j\}$$

となるようなものがとれる．仮定よりポアソン代数 $(C^\infty(U); \cdot, \{\ ,\ \})$ は補題 9.10 により量子化可能ではあるが，$z_1, \cdots, z_s$ の部分があると話がややこしくなるので，以下では $s = 0$ として考える．

次の定理は**量子化されたダルブーの定理**と呼んでもいいだろう．

定理 10.2　U は $\mathbb{R}^n$ の開球体に同位相な座標近傍とする．$(C^\infty(U)[[\mu]];*)$ で $\{\,,\,\}$ の階数が一定 $2r$ で次元 n に等しいとき（シンプレクティックのとき）には $C^\infty(U)[[\mu]]$ の局所生成系 $\{\tilde{x}_1,\cdots,\tilde{x}_r,\tilde{y}_1,\cdots,\tilde{y}_r\}$ で，**正準局所生成系** (canonical local generator system, 略して CLGS) と呼ぶ次の性質を持つものがとれる：

$$[\tilde{x}_i,\tilde{y}_j]=\mu\delta_{ij},\ [\mu,\tilde{x}_i]=[\mu,\tilde{y}_j]=[\tilde{x}_i,\tilde{x}_j]=[\tilde{y}_i,\tilde{y}_j]=0.$$

証明　$[f,g]=\mu\{f,g\} \mod \mu^2$ だから $\mathrm{mod}\ \mu^3$ では次のように書ける：

$$[x_i,x_j]=\mu^2a^{(2)}_{i,j},\ [y_i,y_j]=\mu^2a^{(2)}_{m+i,m+j},\ [x_i,y_j]=\mu\delta_{ij}+\mu^2a^{(2)}_{i,m+j},\ \mathrm{mod}\,\mu^3.$$

そこで 2-次微分形式 ω を次のように定義する：

$$\omega=\sum_{i,j}\left(a^{(2)}_{m+i,m+j}dx_i\wedge dx_j-2a^{(2)}_{i,m+j}dx_i\wedge dy_j+a^{(2)}_{i,j}dy_i\wedge dy_j\right).$$

$*$-積の交換子積 $[\,,\,]$ に関するヤコビ恒等式より $d\omega=0$ がわかる．したがって U は $\mathbb{R}^n$ の開球体に同位相という仮定とポアンカレの補題より，$\omega=d\theta$ と書かれる．そこで θ を $\theta=\sum_i(\theta_i dx_i+\theta_{m+i}dy_i)$ と書き，これの成分を用いて $\bar{x}_i=x_i+\mu\theta_i$, $\bar{y}_i=y_i-\mu\theta_{m+i}$ のようにおく．すると $[\bar{x}_i,\bar{x}_j]$, $[\bar{y}_i,\bar{y}_j]$ および $[\bar{x}_i,\bar{y}_j]$ の μ^2 の成分は消えて $\mathrm{mod}\,\mu^4$ で

$$[\bar{x}_i,\bar{x}_j]=\mu^3a^{(3)}_{i,j},\ [\bar{y}_i,\bar{y}_j]=\mu^3a^{(3)}_{m+i,m+j},\ [\bar{x}_i,\bar{y}_j]=\mu\delta_{ij}+\mu^3a^{(3)}_{i,m+j},\ \mathrm{mod}\,\mu^4$$

のようになる．μ^3 の成分に対してまた同じことをやればこれも消せるので，これを次々に繰り返していくのである．結局

$$\tilde{x}_i=x_i+\mu\theta^{(1)}_i+\cdots+\mu^k\theta^{(k)}_i+\cdots,$$
$$\tilde{y}_i=y_i-\mu\theta^{(1)}_{m+i}-\cdots-\mu^k\theta^{(k)}_{m+i}-\cdots$$

のような形で望みのものが得られる．　（証明終わり）

局所化可能定理と量子化されたダルブーの定理により，非可換環を基礎にしても多様体の概念は可換の場合と同じようにつくれるのである．しかし，これは μ を形式的変数とし，すべてを μ の冪で展開しているからである．このことを物理学者は「絵に描いた餅」（煮ても焼いても食えない）と批判する．

局所化定理と定理 10.2 により $\{,\}$ の階数が一定で次元と等しくなるような座標近傍上では代数は $\{\tilde{x}_1, \cdots, \tilde{x}_r, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_r\}$ で生成され，定理 10.2 で与えた関係式を満たすものであることがわかったわけであるが，これ以外に関係式は成立しないのであろうか？　また，定理 10.2 では $\{,\}$ の階数が次元に等しいとしているが，$z_1, \cdots, z_s$ の部分がある場合はどうなるのだろうか？　これらは μ が中心の元でない場合も含むのでこのような場合も考えなければいけない問題ではある．

10.1.3　ワイル多様体

このような問題を考えるにはもっと組織的に代数を調べなくてはならないから，これはしばらく後にして，U 上ではもはやこれ以上の関係式はないものとして話を進めよう．これでも $M = T^*_N$（N の余接束）の場合を含むので十分多くの例がある．

つまり，形式的 μ-制御代数 $(\mathcal{O}, \mu; *)$ で μ が中心の元となっており，$\mathcal{O} = B[[\mu]]$ としたとき B はある（第 2 可算公理を満たす）C^∞-多様体 M の複素数値 C^∞-関数環 $C^\infty(M)$ であるとし，M は $\mathbb{R}^{2r}$ の開球体に同位相な座標近傍 $\{U_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ で覆われており，$\{U_\alpha; \alpha \in \Lambda\}$ は M の単純被覆であるとする．さらに各 U_α 上に局所化された代数 $(C^\infty(U_\alpha)[[\mu]]; *)$ は

$$x_1^\alpha, \cdots, x_r^\alpha, y_1^\alpha, \cdots, y_r^\alpha \in C^\infty_{\mathbb{R}}(U_\alpha)[[\mu]]$$

で生成され，定理 10.2 で与えた関係式を満たす代数であるとする．この場合には定理 5.4 より $(C^\infty(U_\alpha)[[\mu]]; *)$ は拡張ワイル代数であり，積は具体的に**モイヤル積公式** (5.17) で定義される $*$-積である．

局所生成系変換（座標変換）

局所座標変換にあたるものを見るために，$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ とし，代数をさらに $C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)[[\mu]]$ に局所化する．この場合，生成元として x^α, y^α をとるか x^β, y^β をとるかの区別をしておく必要があるので，それを $C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)[[\mu]]$, $C^\infty(U_\beta \cap U_\alpha)[[\mu]]$ のように書くことで区別することにする．ここでは x^α, y^α は x^β, y^β を使って表示されるし，逆に x^β, y^β は x^α, y^α を使っても表示される：$x^\alpha = \varphi_{\alpha\beta}(x^\beta, y^\beta, \mu)$,　$y^\alpha = \psi_{\alpha\beta}(x^\beta, y^\beta, \mu)$.

$\varphi_{\alpha\beta}, \psi_{\alpha\beta}$ はもっと詳しく書けば $f^{(k)}_{\alpha\beta}, g^{(k)}_{\alpha\beta} \in C^\infty(U_\beta \cap U_\alpha)$ として

$$\begin{cases} \varphi_{\alpha\beta}(x^\beta, y^\beta, \mu) = \sum_{k\geq 0} \mu^k f^{(k)}_{\alpha\beta}(x^\beta, y^\beta) \\ \psi_{\alpha\beta}(x^\beta, y^\beta, \mu) = \sum_{k\geq 0} \mu^k g^{(k)}_{\alpha\beta}(x^\beta, y^\beta) \end{cases} \tag{10.2}$$

のようになる．この関係式を $\forall h(x^\alpha, y^\alpha) \in C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)$ に代入するには補題 1.5 で述べたグラスマン連接と同じ考え方で (10.1) 式で定義された**ワイル連接**を使う：

$$h(x^\alpha, y^\alpha) = h^\sharp(f^{(0)}_{\alpha\beta} + \mu R_{\alpha\beta},\ g^{(0)}_{\alpha\beta} + \mu S_{\alpha\beta})$$

と書いてテイラー展開で定義するのである．一見無限和であぶなそうに見えるが，各 μ^m の係数は有限和しか使わないで計算できる．このような定義が可能なのは μ の形式的冪級数しか考えていないからである．

(10.2) 式で与えられるこの対応を $\Phi_{\alpha\beta}(f)$ と書くことにする．同じ代数を生成元を替えて書いているだけだから次が成立する．

補題 10.1　$\Phi_{\alpha\beta}$ は $(C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta)[[\mu]]; *)$ から $(C^\infty(U_\beta \cap U_\alpha)[[\mu]]; *)$ への同型写像である．

定義のしかたより $\Phi_{\alpha\beta} = \Phi^{-1}_{\beta\alpha}$ は明らかだが，$U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \neq \emptyset$ のとき $(C^\infty(U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma)[[\mu]]; *)$ 上で次が成立することは明らかであろう：

$$\Phi_{\alpha\beta}\Phi_{\beta\gamma}\Phi_{\gamma\alpha} = 1 \quad \text{（恒等写像）}. \tag{10.3}$$

ワイル連接を使う計算法で非可換代数 $(C^\infty(M)[[\mu]]; *)$ の元は多様体上で関数を扱うのと同じように局所生成系で表示して扱うことができる．この意味で $(C^\infty(M)[[\mu]]; *)$ は局所的に定義された代数の貼り合わせで得られる代数と理解できる．そこで非可換代数 $(C^\infty(M)[[\mu]]; *)$ をこのように見ているときにこれを**ワイル多様体の関数環**（略して**ワイル関数環**）と呼び，背後に想定される多様体にあたるものを**ワイル多様体**と呼ぶ．つまり，関数環にあたるものが与えられただけで，あたかもそれがどこかの集合上で定義された古典的関数環のような述べ方をしているが，与えられているのはいわば座標変換則だけであって，ワイル多様体なるものを点集合として定義したわけではないのである（この辺の話と 3.3.3 項の話を比べて，何かを感じてほしい）．

これでは心許ないと思う人は，M の各点で 1.4.2 項でやったように形式的冪級数環 $\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x})$ を考え，$\Phi_\infty(p;\boldsymbol{x})[[\mu]]$ に形式的ワイル代数の構造を入れて M 上の代数束をつくる．この代数束と，ある条件を満たす切断全体の環との組をワイル多様体と定義してもよい．しかし，これは同じことを面倒臭く述べているだけにすぎない．点集合にこだわらなければ上のような素直な考え方ができるのである．

上の $\mathcal{O} = C^\infty(M)[[\mu]]$ の場合には $p \in M$ で平坦 (flat)（すべての階数の偏微分係数が $p \in M$ で 0）な関数の全体を $F_p^{(\infty)}$ とすると，$F_p^{(\infty)}[[\mu]]$ は $(\mathcal{O};*)$ の両側イデアルとなると同時に $\frac{1}{\mu}\mathcal{O}$ の中のリーイデアルにもなっている．この意味では μ を形式的変数と見ているとまだ古典的「点」が見えているともいえる．

10.2 Super 化

相空間を失って，「古典力学は空中分解した」と捉える人たちは新しい「点の概念」に向かって漂流を開始したと見てよいだろう．その行き付く先はおそらくまだ誰も知らないのだが，注目すべき動きである．新しい「点概念」はその上で少なくとも（不確定性原理を取り込んだ）量子力学がつくれるものが要求されている．さまざまな試みがあり，前節で述べたワイル多様体などもその 1 つだが，決定版はまだまだのようである．そういうものの中で，割と手軽な試みとして広く受け入れられているものに「super 化」という考え方がある．

super 教

これが割とお手軽なものだから，これをやる人たちを super 教信者などと揶揄する傾向もあるが，私自身はもっとまじめである．図形概念をまじめに力学の中に取り込むためには，どうしてもこういうものがいる．

これはグラスマン代数の考え方を拡張したもので，偶奇性 (parity) をうまく取り込む技術である．これまでの代数計算の枠内ではあるが 1.3.3 項で見たように，$\pm$ の符号に注意しながら計算公式をつくっていくとかなり見通しがよいものがつくれるというところからきている．super 的に考えるときには**グラスマン代数の部分をこれまでの基礎体 $\mathbb{R}$ とか $\mathbb{C}$ にあたるものと考え，$C^\infty(M)$ と思ってきたところを外微分環 $\mathcal{F}_M^*$ と考えるのである．**

【例 10.1】 グラスマン代数や，すぐ後に出るクリフォード代数などのように**偶奇性が考えられる結合代数** $(\mathcal{O};*)$ というのは $\mathcal{O}=\mathcal{O}^{ev}\oplus\mathcal{O}^{od}$ と分解し，$\mathcal{O}^{ev}*\mathcal{O}^{ev}\subset\mathcal{O}^{ev}$, $\mathcal{O}^{od}*\mathcal{O}^{od}\subset\mathcal{O}^{ev}$, $\mathcal{O}^{ev}*\mathcal{O}^{od}\subset\mathcal{O}^{od}$, $\mathcal{O}^{od}*\mathcal{O}^{ev}\subset\mathcal{O}^{od}$ となっているもののことである．ここでは

$$\{\omega,\omega'\}_*=\omega'*\omega-(-1)^{p(\omega)p(\omega')}\omega'*\omega \quad \text{(超交換子)}$$

と定義すると次のような性質が出てくる：

$$\{\omega,\omega'\}_*=-(-1)^{p(\omega)p(\omega')}\{\omega',\omega\}_* \quad \text{(超交代性)}$$
$$\{\omega,\omega'*\omega''\}_*=\{\omega,\omega'\}_**\omega''+(-1)^{p(\omega)p(\omega')}\omega'*\{\omega,\omega''\}_* \quad \text{(超双微分)}$$

さらに**超ヤコビ恒等式**と呼ばれる次の等式が成立する：

$$\{\omega,\{\omega',\omega''\}_*\}_*+(-1)^{p(\omega)(p(\omega')+p(\omega''))}\{\omega',\{\omega'',\omega\}_*\}_*$$
$$+(-1)^{p(\omega'')(p(\omega)+p(\omega'))}\{\omega'',\{\omega,\omega'\}_*\}_*=0.$$

これらの式はかなり複雑に見えるかもしれないが，$\{\omega,\{\omega',\omega''\}_*\}_*$ から $\{\omega',\{\omega'',\omega\}_*\}_*$ に ω を動かして移るときに飛び越しを何回行なっているかを考えると納得できるであろう． (使う頭は手作業の飛び越し回数)

外微分環 $\mathcal{F}_M^*$ は裏表のある面積とか体積の概念を数学化して代数の中に取り込んだものであり，たんに偶奇性が考えられる結合代数というだけでなく，超交換子がつねに 0 という性質があるので**超** (super) **可換代数**と呼ばれる．力学の中にこういうものが自然に取り込まれていてほしいものなのである．観測までも力学の中に組み入れて考えることから不確定性がでてきたのだから $\mathcal{O}=\mathcal{F}_M^*$ の場合でも何かポアソン代数のような構造があって，それが不確定性を支配していると考えるのは自然に思えるのである．

10.2.1 グラスマン代数上の超ポアソン構造

まず $(\Lambda^*(m);\wedge)$ のほうにポアソン代数に相当する構造を入れよう．$e^1,\cdots,e^m$ を $\Lambda^*(m)$ の生成元とする．$p(\omega)$ は（偶のとき 1，奇のとき 0 とする）偶奇性，g^{ij} は実（または複素）$n\times n$ 対称行列とし下のような微分記号の約束をする：

(♣) $\overrightarrow{\partial_i}\omega:=$ ω の各項の e^i を交代性を使って一番左に持ってきて切り落とす．

(♣) $\omega\overleftarrow{\partial_i}:=$ ω の各項の e^i を交代性を使って一番右に持ってきて切り落とす．

ただし，1 の微分は 0 と約束する．これを用いて $\forall\omega,\omega'\in\Lambda^*(n)$ に対して次のように定義する（関数のときと違って $\{e_i,e_j\}=\{e_j,e_i\}$ であることに注意）：

$$\{\omega,\omega'\}=\omega\ \overleftarrow{\partial_i}{\wedge}g^{ij}{\wedge}\overrightarrow{\partial_j}\ \omega',\quad \{\ ,\ \}:\Lambda^{(p)}(m)\times\Lambda^{(q)}(m)\to\Lambda^{(p+q-2)}(m).$$

$\wedge$ が 2 カ所に入っているがこれは記号のバランスをとるためだけだから気にしなくてよい．この定義は生成元 $e^1,\cdots,e^m$ を別の生成元 $u^1,\cdots,u^m$ に正則 1 次変換で変換しても変わらない．$\overleftarrow{\partial_i}{\wedge}g^{ij}{\wedge}\overrightarrow{\partial_j}$ の部分が変わらないように新しい g^{ij} に変換すればよいのである．

$(\Lambda^*(n);\wedge)$ のような超可換な代数上の線形変換 $D:\mathcal{F}_M^*\to\mathcal{F}_M^*$ がパリティが偶 $(p(D)=0)$，奇 $(p(D)=1)$ の**超微分**であるとは

$$D(\omega{\wedge}\omega')=(D\omega){\wedge}\omega'+(-1)^{p(D)p(\omega)}\omega{\wedge}(D\omega')$$

が成立している場合をいう．

微分とはいっているが，この微分は物の動き，運動とか無限小といったものと何の関係もない．

さらに超ヤコビ恒等式を満たす超交代な演算が与えられているものを**超リー代数**という．また，超可換代数に，超交代な超双微分 $\{\ ,\ \}$ が定義され，それが超ヤコビ恒等式を満たすとき**超ポアソン代数**と呼ぶ．$(\Lambda^*(n);\wedge,\{\ ,\ \})$ は超ポアソン代数である．

命名のしかたというのは大切である．super 理論が揶揄される理由の 1 つは用語を敷衍して使っていくと（日本語では）**超下品**になっていくからではある．

外微分環への拡張

$(\Lambda^*(n);\wedge,\{\ ,\ \})$ 上の超ポアソン構造を $(\mathcal{F}_M^*;\wedge)$ に拡張して考えるのはたやすい．まず，$m=\dim M$ とする．上の話では g^{ij} は定数であったが，これを M に与えられた対称テンソルだと考えればよい．

局所座標近傍 U 上では $x^1,\cdots,x^m$ を座標関数とし，$dx^1,\cdots,dx^n$ を $\Lambda^*(m)$ の生成元として考えると $\mathcal{F}_U^*=C^\infty(U)\otimes\Lambda^*(m)$ であり，これは $\Lambda^*(m)$ の元の係数の部分を $C^\infty(U)$ にしただけのものと理解してよいのだから，これを利用して $\{f\otimes\xi,g\otimes\eta\}=fg\otimes\{\xi,\eta\}$ と定義する．この定義により $(\mathcal{F}_U^*;\wedge,\{\ ,\ \})$ は超ポアソン代数となる．これで局所的には超ポアソン代数が定義できたのだが，これが座標変換に耐え $(\mathcal{F}_M^*;\wedge)$ 上に超ポアソン代数の構造を定義することは $\overleftarrow{\partial_i}{\wedge}g^{ij}{\wedge}\overrightarrow{\partial_j}$

が座標変換に耐え M 上で意味を持つことでわかる．$\{\mathcal{F}_M^{(p)}, \mathcal{F}_M^{(q)}\} \subset \mathcal{F}_M^{(p+q-2)}$ である．$C^\infty(M)$ にはポアソン構造を考えていないから $\{f, g\} = 0$ である．このような超ポアソン代数を**純超ポアソン代数**と呼んでおこう．上で定義した超ポアソン代数は，純超ポアソン代数 $\Lambda^*(m)$ のほうに入っている超ポアソン構造を関数係数に広げただけのものである．

一般に $(C^\infty(U); \cdot, \{\ ,\ \})$ がポアソン代数であるとき，

$$\{f \otimes \xi, g \otimes \eta\} = \{f, g\} \otimes \xi{\wedge}\eta + fg \otimes \{\xi, \eta\} \tag{10.4}$$

のように定義するとこれで超ポアソン代数となる．これを $C^\infty(U)$ 上のポアソン構造と超ポアソン代数 $\Lambda^*(m)$ とのテンソル積と呼ぶ．これのほうは $C^\infty(U)$ のポアソン構造をきちんと取り込んでいるので感じがよい．しかしこの定義は座標変換すると崩れてしまう．

一般にポアソン環 $(C^\infty(M); \cdot, \{\ ,\ \})$ が与えられたとき，これを $(\mathcal{F}_M^*; \wedge)$ に拡張して超ポアソン代数にすることが可能かどうかはわかっていない．後で $M = T_N^*$ の場合にそれが可能であることを示す．

10.2.2　関数係数のクリフォード代数

この項では純超ポアソン構造の（量子化のグラスマン版とでもいうべき）"量子化" を考える．$C^\infty(M)$ のポアソン構造はここでは考えない．

これは関数係数のグラスマン代数が外微分環だったことを思い出して関数係数クリフォード代数をつくることなのである．

$\dim M = m$ とし，M の点 q を任意に固定して q での余接束空間を T_q^* とする．$\mathcal{T}^m(q)$ を T_q^* から生成される**自由テンソル代数**とし，その積を $\otimes$ で表す (2.2.4 項参照)．

係数を M 上の C^∞-関数に置き換えたものを関数係数自由テンソル代数（または自由テンソル場の代数）と呼び，$\mathcal{T}^m(M)$ と書く (5.1 節参照)．

線形空間 T_q^* の基底を $dx_q^1, \cdots, dx_q^m$ とし，実対称行列 $Q = (g^{ij}(q))$ を任意に固定して $dx_q^i{\otimes}dx_q^j + dx_q^j{\otimes}dx_q^i - 2\mu^2 g^{ij}(q)$ から生成される両側イデアルを $I_q(Q)$ とする．すると商代数 $\mathcal{T}^m(q)/I_q(Q)$ が考えられるが，これを**クリフォード代数**または**クリフォード環**と呼び，$C_Q^m(q)$ と書く．Q は何でもよいが，できあがる代数はむろん Q に依存する．グラスマン代数は $Q = 0$ としたときのクリフォード代数である．クリフォード代数の積を $*$ で表す．$dx_q^i * dx_q^j + dx_q^j * dx_q^i = 2\mu^2 \langle dx_q^i, dx_q^j \rangle$

のように書くときもある．$\langle dx_q^i, dx_q^j\rangle = g^{ij}(q)$ だからこれを内積のように考えてもよい．

> T_q^* の線形変換で行列式が 1 であるものを $SL(T_q^*)$ とする．さらに上の内積を保つ線形変換の全体を $SO(T_q^*)$ とする．面積とか体積を扱うためにグラスマン代数を持ち出してきたのだが，クライン流の言い方ではこれは $SL(T_q^*)$ に属する幾何学である．一方，クリフォード代数とはユークリッド幾何学ないしローレンツ幾何学の代数的側面を捉えたものである．クライン流の言い方ではこれは $SO(T_q^*)$ に属する幾何学である．ところで，この 2 つの代数を見ると，形式的にはクリフォード代数はグラスマン代数を量子化したものと見えるのである．

以下では M のリーマン計量（またはローレンツ計量）を使って $g^{ij}(q) = \langle dx_q^i, dx_q^j\rangle$ としたときのクリフォード代数を考える．Q が（正定値とは限らないが）非退化だから $\dfrac{1}{2\mu^2}(dx_q^i * dx_q^j + dx_q^j * dx_q^i)$ は内積のように考えてよい．そこで $\omega, \omega' \in T_q^*M$ は $\omega = \sum_i w_i dx_q^i$, $\omega' = \sum_i w_i' dx_q^i$ と書かれるが $\sum_{i,j} g^{ij}(q) w_i w_j'$ を**内積**と呼んで $\langle \omega, \omega'\rangle$ と書く．線形基底の選び方に無関係に $\forall\omega, \omega' \in T_q^*$ に対して次のようになる：

$$\omega * \omega' + \omega' * \omega = 2\mu^2 \langle \omega, \omega'\rangle. \tag{10.5}$$

さらに以下では点 $q \in M$ を M 上で動かして考える．したがって係数体にあたるところを $C^\infty(M) = \mathcal{F}_M^{(0)}$ にして考えるが計算は各点ごとに行なうので問題がない．この代数を $C_Q^m(M)$ と書き，**関数係数のクリフォード代数**と呼ぶ．q を動かして考えるので dx_q^i とは書かずに dx^i のように書く．グラスマン代数に対してこのような係数拡張を行なったものが外微分環 $\mathcal{F}_M^*$ である．

$(\mathcal{T}^m(M); \otimes)$ から $C_Q^n(M)$ 上に自然に誘導される積も $*$ で書くことにする．また $\frac{1}{2}(dx^i * dx^j + dx^j * dx^i)$ を対称積と呼んで $dx^i \odot dx^j$ と書くこともある．

10.2.3 $C_Q^{2n}(M)$ の $\mathcal{F}_M^*$ への作用

関数係数のクリフォード代数の定義は前項のようなものだが，計算は案外面倒なので，計算公式をいくつかつくっておく必要がある．そのためにはまず関数係数のクリフォード代数の元の書き方を一定にしておかなければならない．そのために，$C_Q^m(M)$ は線形空間としては $\mathcal{F}_M^*$ と同じであることに注目し，元の表示は外微分環のほうから借りてきて，$C_Q^m(M)$ は $\mathcal{F}_M^*$ に $\wedge$ とは違う積の入っ

たものとみなせることを示そう（これは，**ワイル代数を，多項式環に普通の可換積とは違う積の入ったものとみなしたことに対応**している）．

> クリフォード代数は**グラスマン代数を量子化したもの**と考えられる．

これを実行するためにまず $C_Q^m(M)$ を $\mathcal{F}_M^*$ 上の線形作用素として作用させる．$C_Q(M)$ の生成元は $\mathcal{F}_M^{(1)}$ だから，まず $\omega\in\mathcal{F}_M^{(1)}$ を $\mathcal{F}_M^{(p)}$ に次のように作用させる：$\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p\in\mathcal{F}_M^{(p)}$ として，
$p=$ 奇数のとき：

$$\omega*(\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p)=\mu\omega\wedge\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p \\ +\mu^2\textstyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\omega_1\wedge\cdots\overbrace{\langle\omega,\omega_k\rangle}^{k\text{ 番目をこれに置き換える}}\cdots\wedge\omega_p$$

$p=$ 偶数のとき：

$$\omega*(\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p)=\omega\wedge\omega_1\wedge\omega_2\wedge\cdots\wedge\omega_p \\ +\mu\textstyle\sum_{k=1}^{p}(-1)^{k-1}\omega_1\wedge\cdots\overbrace{\langle\omega,\omega_k\rangle}^{k\text{ 番目をこれに置き換える}}\cdots\wedge\omega_p$$

これをさらに分配律が成り立つように（線形になるように）定義を拡張する．ていねいに計算してみれば次のことが自然にわかる．

補題 10.2　$\forall\Omega\in\mathcal{F}_M^*$ に対して次式が成立する：

$$\omega*(\omega'*\Omega)+\omega'*(\omega*\Omega)=2\mu^2\langle\omega,\omega'\rangle\Omega.$$

$\mathcal{L}(\mathcal{F}_M^*)$ を $\mathcal{F}_M^*$ から $\mathcal{F}_M^*$ への線形写像 L で係数環 $\mathcal{F}_M^{(0)}$ に関しても線形になっているもの（つまり $L(f\Omega)=fL(\Omega)$ が成立，$\mathcal{O}$-線形）の全体とする．たとえば $\omega\in\mathcal{F}_M^{(1)}$ に対して ω を左から $*$-積する作用素を $\ell_\omega(\Omega)=\omega*\Omega$ とすると $\ell_\omega\in\mathcal{L}(\mathcal{F}_M^*)$ である．

補題 10.2 は $\forall\omega,\omega'\in\mathcal{F}_M^{(1)}$ に対して $\ell_\omega\ell_{\omega'}+\ell_{\omega'}\ell_\omega=2\mu^2\langle\omega,\omega\rangle I$ であるといっているが，このように，クリフォード代数の定義関係式がもろに線形写像で実現できているものを**クリフォード写像**と呼ぶ．このような ℓ は $C_Q^m(M)$ から $\mathcal{L}(\mathcal{F}_M^*)$ への準同型で $\ell(1)=1$ を満たす写像に一意的に拡張できることが知られている．

補題 10.3 上で一意的に拡張された $\ell : C_Q^m(M) \to \mathcal{L}(\mathcal{F}_M^*)$ は単射準同型であり，しかも $\ell(C_Q^m(M))(1) = \mathcal{F}_M^*$ である．

証明 ℓ が $\mathcal{T}^m(q)$ から $\mathcal{L}(\mathcal{F}_q^*)$ への準同型 $\tilde{\ell}$ に拡張できることは明らか．さらに $\mathcal{F}_q^*$ のつくられ方を考えれば $\tilde{\ell}(\mathcal{T}^m(q))(1) = \mathcal{F}_q^*$ もわかる．補題 10.2 より $\tilde{\ell}(I_q(Q)) = 0$ がわかるので，$\tilde{\ell}$ から準同型 $\ell : C_Q^m(M) \to \mathcal{L}(\mathcal{F}_M^*)$ が誘導される．q を止めて次元を考えれば単射であることもわかる． (証明終わり)

上のことが理解できなくても，以下のことがわかれば十分．

線形空間としては $C_Q^m(M)$ は $\mathcal{F}_M^*$ と同一視してよい．つまり，$C_Q^m(M)$ の元を表示するときは微分形式として表示し，$C_Q^m(M)$ は微分形式の空間に外積 $\wedge$ とは違う結合的な積 $*$ が入っているものと考えるのである．積の公式はグラスマン代数の計算のルールを下地にして書かれるが，これを書くには 10.2.1 項で使った微分の記号 (♣) の約束が必要である．

$*$-積の公式はこの微分記号の約束を使って次のように与えられる：

$$\Omega * \Omega' = \sum_k \mu^{k+p(\Omega)p(\Omega')} \frac{1}{k!} \sum_{\substack{i_1,\cdots,i_k \\ j_1,\cdots,j_k}} \Omega\overleftarrow{\partial_{i_1}} \cdots \overleftarrow{\partial_{i_k}} \wedge g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \wedge \overrightarrow{\partial_{j_k}} \cdots \overrightarrow{\partial_{j_1}} \Omega'.$$

$\wedge$ が 2 カ所に入っているがこれは記号のバランスをとるためだけだから気にしなくてよい．記号を簡略化して

$$\Omega * \Omega' = \mu^{p(\Omega)p(\Omega')} \Omega e^{\mu \overleftrightarrow{\partial_i \wedge g^{ij} \wedge \partial_j}} \Omega' \tag{10.6}$$

とも書く．たとえば $\omega, \omega', \omega'' \in \mathcal{F}_M^{(1)}$ に対しては

$$\omega * \omega' = \mu\omega\wedge\omega' + \mu^2\langle\omega, \omega'\rangle,$$

$$(\omega\wedge\omega') * \omega'' = \omega\wedge\omega'\wedge\omega'' + \mu\langle\omega', \omega''\rangle\omega - \mu\langle\omega, \omega''\rangle\omega',$$

$$\begin{aligned}\omega * (\omega' * \omega'') &= \mu\omega * (\omega'\wedge\omega'') + \mu^2\omega\langle\omega', \omega''\rangle \\ &= \mu\omega\wedge\omega'\wedge\omega'' + \mu^2\langle\omega, \omega'\rangle\omega'' - \mu^2\langle\omega, \omega''\rangle\omega' + \mu^2\langle\omega', \omega''\rangle\omega\end{aligned}$$

などである．(10.5) 式や，$\omega * (\omega' * \omega'') = (\omega * \omega') * \omega''$ も確かめられる．また，

$$\omega * \omega' = \mu\omega\wedge\omega' + \mu^2\{\omega, \omega'\}, \quad [\omega, \omega'] = 2\mu\omega\wedge\omega'$$

も成立する．グラスマン代数は表示を一定にして書きやすいので，表示ではこれを使う．クリフォード代数の積はグラスマン代数の積のデフォルメであり，グラスマン代数の空間に $\wedge$-積とは違う積が定義されたものと理解される．

定理 10.3 $\mathcal{F}_M^*[[\mu]]$ を外微分環の元を係数とする μ の形式的冪級数の全体とする．上で定義した積 $*$ の入った $(\mathcal{F}_M^*[[\mu]];*)$ は μ-制御代数である．

この場合 $B=\mathcal{F}_M^{ev}$ であり (4.3 節参照)，B に積 $*$ から誘導される積は外微分環 $(\mathcal{F}_M^*;\wedge)$ 上で与えた対称積 $\circ$ である．$(\mathcal{F}_M^*;\circ)$ では $\mathcal{F}_M^{od}$ は根基 (radical) でしかなかったが μ の係数まで見ると $\mathcal{F}_M^*$ のグラスマン積 $\wedge$ が復活するし，μ^2 の係数まで見ると純超ポアソン代数 $(\mathcal{F}_M^*;\wedge,\{\,,\,\})$ が得られている．その意味で $(\mathcal{F}_M^*[[\mu]];*)$ は純超ポアソン代数 $(\mathcal{F}_M^*;\wedge,\{\,,\,\})$ の量子化と呼んでもよい．$\mathcal{F}_M^*$ に上のようにして定義された積 $*$ を**クリフォード積**と呼ぶ．

$$\mathcal{F}_M^{ev}[[\mu]]*\mathcal{F}_M^{ev}[[\mu]]\subset\mathcal{F}_M^{ev}[[\mu]],\quad \mathcal{F}_M^{od}[[\mu]]*\mathcal{F}_M^{ev}[[\mu]]\subset\mathcal{F}_M^{od}[[\mu]]$$

である．以下ではとくに断らない限り g^{ij} が各点で非退化であるとする．

U を M の座標近傍とし，$e^1,\cdots,e^m$ を T_q^* の正規直交基底の場とする．g^{ij} を正定値とはしていないのでこの場合「正規」といっているのは $\langle e^i,e^j\rangle=\varepsilon_i\delta^{ij}$, $\varepsilon_i=\pm1$ の意味である．グラスマン代数のときにはいつでも $dx_q^i\wedge dx_q^j=-dx_q^j\wedge dx_q^i$ であり,「ひっくりかえすと符号が変わる」というルールが優先しているので $dx_q^i\wedge dx_q^i=0$ も要求されているのだが，クリフォード代数のときにはこのルールは直交基底で $i\neq j$ の場合しかなりたたないし，しかも $e^i*e^i=\mu^2\varepsilon_i$ となる．

$dV=e^1\wedge\cdots\wedge e^m$, $d\mathcal{E}=e^1*\cdots*e^m$ とする．dV は体積要素だが $d\mathcal{E}$ は線形の基底変換に対してでも体積のようにはふるまわない．$A=(a_{ij})\in SL_{\mathbb{R}}(m)$ に対して $u^i=\sum a_{ij}e^j$ と変換すると dV のほうは $u^1\wedge\cdots\wedge u^m=e^1\wedge\cdots\wedge e^m$ であるのに対し，$d\mathcal{E}$ のほうはかなり変化する．しかし上の正規直交基底で計算してみれば容易に $\mathcal{E}=\mu^{[\frac{m}{2}]}dV$ がわかる．しかも $\mathcal{E}$ には

$$e^i*d\mathcal{E}=(-1)^{i-1}\varepsilon_i\mu^2d\mathcal{E}_i=(-1)^m d\mathcal{E}*e^i\quad (d\mathcal{E}_i=e^1*\cdots*\check{e}^i*\cdots*e^m)$$

という性質があることが $m=2,3,\cdots$ あたりを少し試してみれば容易にわかる．このことを使い，もう少し試すと次がわかる．

補題 10.4 $(\mathcal{F}_U^*[[\mu]];*)$ の中心は $m=\dim M$ が偶数ならば $\mathcal{F}_U^{(0)}[[\mu]]$ であり，m が奇数ならば $\mathcal{F}_U^{(0)}[[\mu]]\oplus\mathcal{F}_U^{(0)}[[\mu]]*d\mathcal{E}$ である．

一方，$(\mathcal{F}_U^{ev}[[\mu]];*)$ の中心は $m=\dim M$ が奇数ならば $\mathcal{F}_U^{(0)}[[\mu]]$ であり，m が偶数ならば $\mathcal{F}_U^{(0)}[[\mu]]\oplus\mathcal{F}_U^{(0)}[[\mu]]*d\mathcal{E}$ である．

これより，$d\mathcal{E}$ は向きの同じ正規直交基底どうしならば正規直交基底の選び方によらないこともわかる．つまり $\mu^{-[\frac{m}{2}]}d\mathcal{E}$ が体積要素として振る舞えるのは向きの同じ正規直交基底の範囲内だけなのである．このことより多様体が向き付け可能 (orientable) ならば，$\mu^{-[\frac{m}{2}]}d\mathcal{E}$ は多様体 M 全体で定義されたものと思える．

$\mathcal{F}_U^*$ の任意の元は $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m)$, $\lambda_i=0,1$, $e^\lambda=e_1^{\lambda_1}*\cdots*e_m^{\lambda_m}$ という多重添字を使って $\omega=\sum a_\lambda e^\lambda, a_\lambda\in\mathcal{F}_U^{(0)}$ と書かれる．この ω に対して，$\tilde{\omega}\in\mathcal{F}_U^*$ を

$$\tilde{\omega}=\sum_\lambda a_\lambda e_m^{\lambda_m}*\cdots*e_1^{\lambda_1}$$

のように記述の順序を反対にしたものと定義する．

補題 10.5 $\forall\omega\in\mathcal{F}_M^{(p)}$ に対して $*_H\omega=\mu^{-[\frac{p}{2}]}\tilde{\omega}*dV$ と定義すると $*_H\omega\in\mathcal{F}_M^{(m-p)}$ で，$\omega*(*_H\omega)=dV$ となる．$*_H:\mathcal{F}_M^{(p)}\to\mathcal{F}_M^{(m-p)}$ はホッジ（Hodge）**作用素**と呼ばれる．

10.3 外微分環の量子化

前に述べた問題意識からすれば，代数 $(\mathcal{F}_M^*[[\mu]];*)$ は純超ポアソン代数 $(\mathcal{F}_M^*;\circ,\{\ ,\ \})$（$\circ$ は外微分環の対称積）の量子化だと一応は言ってよいわけだが，$C^\infty(M)=\mathcal{F}_M^{(0)}$ 上のポアソン構造は 0 なので，これでは運動が何も取り扱えないし，第一，不確定性と何のつながりもない．μ-制御代数とはいうもののまったく量子論の本質とは関係ないのである．

シンプレクティック代数の量子化がワイル代数，グラスマン代数の量子化がクリフォード代数なのだと考えれば，10.2 節で述べた超ポアソン代数の量子化にあたるものはワイル－クリフォード代数と呼ぶべきものでなければなるまい．

そういうものを考えようとすれば次のものがまず思い当たるであろう．U をシンプレクティック多様体 M の座標近傍とし，$x^1,\cdots,x^n,y_1,\cdots,y_n$ をダルブー座標系とする．また C_Q^n を $e^1,\cdots,e^n$ で生成される（関数係数ではなく $\mathbb{R}$ 係数の）クリフォード代数とする．

モイヤル積公式でワイル関数環 $(C^\infty(U)[[\mu]];*)$ が得られているからテンソル積 $C^\infty(U)[[\mu]]\otimes C_Q^n$ をつくればワイル－クリフォード代数と呼んでいいような

μ-制御代数が得られる．これも (10.4) 式同様，座標変換には耐えないが（後で使うので）少し詳しく述べよう．

$C^\infty(U)[[\mu]]$, C^n_Q からそれぞれ元 f, w をとり形式的に $f \otimes w$ を考え，これの有限個の線形結合全体を $C^\infty(U)[[\mu]] \otimes C^n_Q$ と書き，$C^\infty(U)[[\mu]]$ と C^n_Q の**テンソル積**と呼ぶ．積を $(f \otimes w) * (f' \otimes w') = (f * f') \otimes (w * w')$ で定義しておけば $(C^\infty(U)[[\mu]] \otimes C^n_Q; *)$ は結合代数である．これを**ワイル－クリフォード代数**と呼ぶ．ここでは

$$[f \otimes w, f' \otimes w'] = [f, f'] \otimes (w * w') + f * f' \otimes [w, w'] + [f, f'] \otimes [w, w']$$

である．$(f \otimes 1) * (1 \otimes w) = f \otimes w = (1 \otimes w) * (f \otimes 1)$ だから，$f \otimes 1 = f$, $1 \otimes w = w$ のように同一視すれば $C^\infty(U)[[\mu]]$ の元と C^n_Q の元は可換になっているので，C^n_Q のほうは不確定性と何の関係もないように見えるのである．

そこで，多様体上で一気にワイル－クリフォード代数と呼べるようなものを書くのはあきらめて，ひとまず配位空間上の外微分環を考え，運動とか不確定性とは無関係に定理 10.3 のやり方で μ-制御代数をつくっておき，これに共変微分を取り込んでいくことにより不確定性を出現させる方向で考えることにする．

N を C^∞-リーマン多様体，T_N を接束，$M = T^*_N$ を余接束とする．$(\mathcal{F}^*_N; \wedge)$ を N 上の外微分環とし，前節のやり方で μ-制御代数 $(\mathcal{F}^*_N[[\mu]]; *)$ をつくっておく．これに余接束空間の変数を添加していってワイル代数も取り込んだ代数をつくろうとするのである．

重力理論

重力理論とは一般相対論のことである．これは配位空間としての時空多様体の上でテンソル解析を駆使して書かれている．一般相対論と古典微分幾何学とは表裏一体である．だから，重力理論を量子化するということは古典微分幾何学全体を量子化するということと同じことなのである．微分幾何学者が気にしないわけにはいかないのである．

10.3.1 曲率テンソルの性質

望ましい代数の基本関係を書くために少し曲率テンソルについてまとめておく．∇ を捩率テンソル 0 の計量接続とする．

局所座標系による表示も使うが，混乱が起きない限り $\partial_{x_i}, \nabla_{\partial_{x_i}}$ を ∂_i, ∇_i のように省略した記号で表す．共変微分は自然に $(\mathcal{F}^*_M; \wedge)$ の微分として拡張され，

$\forall X \in \mathcal{X}(N)$ について

$$\nabla_X(\omega\wedge\omega') = (\nabla_X\omega)\wedge\omega' + \omega\wedge(\nabla_X\omega') \tag{10.7}$$

であるが同時に $\nabla_k(\overleftarrow{\partial_i}\wedge g^{ij}\wedge\overrightarrow{\partial_j}) = 0$ としてよいから，$(\mathcal{F}_M^*;*)$ の微分としても拡張されている．つまり

$$\nabla_X(\omega*\omega') = (\nabla_X\omega)*\omega' + \omega*(\nabla_X\omega') \tag{10.8}$$

ともなる．曲率テンソル (2.11) は $[\partial_i, \partial_j] = 0$ に注意して局所座標系で書けば

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = (\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)\partial_k = R_{ijk}^{\cdots l}\partial_l$$

だが，テンソル解析の添字の上げ下げルールとして

$$R_{ijkl} = R_{ijk}^{\cdots m}g_{ml} \quad \text{（アインシュタイン記法）} \tag{10.9}$$

と定義しておくと，

$$(\nabla_i\nabla_j - \nabla_j\nabla_i)dx^k = -R_{ijl}^{\cdots k}dx^l \quad \text{（アインシュタイン記法）}, \tag{10.10}$$

$$R(\partial_i, \partial_j)(g_{km}dx^m) = R_{ijk}^{\cdots l}g_{lm}dx^m = R_{ijkm}dx^m \tag{10.11}$$

である．こうするとリーマン計量，ローレンツ計量を問わず

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl}, \quad R_{ijkl} = R_{klij} \tag{10.12}$$

である．捩率テンソルが 0 なので補題 2.3 で与えたビアンキの恒等式は第 1 のものは $R_{ijkl} + R_{kijl} + R_{jkil} = 0$ であるが第 2 のものは $\Omega(X,Y) = X^1Y^jR_{ijkl}dx^k\wedge dx^l$ として 2 次微分形式に値を持つテンソルと見て $\Omega(X,Y) = X^iY^j\Omega_{ij}$ と見たときに

$$\nabla_i\Omega_{jk} + \nabla_j\Omega_{ki} + \nabla_k\Omega_{ij} = 0 \tag{10.13}$$

である．定義より $\Omega(X,Y)$ が $\mathcal{F}_N^{(p)}$ から自分自身への線形写像であり，$(\mathcal{F}_N^*;\wedge)$ の微分になっていることがわかる．つまり

$$\Omega(X,Y)(\omega\wedge\omega') = \Omega(X,Y)(\omega)\wedge\omega' + \omega\wedge\Omega(X,Y)(\omega')$$

であり，さらに

$$\nabla_X\nabla_Y(\omega*\omega')=$$
$$(\nabla_X\nabla_Y\omega)*\omega'+(\nabla_X\omega)*(\nabla_Y\omega')+(\nabla_Y\omega)*(\nabla_X\omega')+\omega*(\nabla_X\nabla_Y\omega')$$

に注意すれば次の式も成立する：

$$\Omega(X,Y)(\omega*\omega')=\Omega(X,Y)(\omega)*\omega'+\omega*\Omega(X,Y)(\omega'). \tag{10.14}$$

ついでに共変外微分 $d_\nabla\omega$ を次式で定義しておこう：

$$d_\nabla\omega=\sum dx^i{\wedge}\nabla_i\omega. \tag{10.15}$$

共変外微分 d_∇ は $\wedge$ と $*$ の両方について超微分の性質を持つ．つまり

$$\begin{aligned} d_\nabla(\omega{\wedge}\omega')&=(d_\nabla\omega){\wedge}\omega'+(-1)^{p(\omega)}\omega{\wedge}(d_\nabla\omega') \\ d_\nabla(\omega*\omega')&=(d_\nabla\omega)*\omega'+(-1)^{p(\omega)}\omega*(d_\nabla\omega') \end{aligned} \tag{10.16}$$

である．とくに $f,g\in\mathcal{F}_N^{(0)}$ のときには $d_\nabla f=df$ である．しかし，d_∇ は普通の外微分と違って $d_\nabla^2=\frac{1}{2}\Omega\wedge$（曲率テンソル）となる．曲率テンソルが 0 の計量多様体（これを平坦な多様体という）ならば $d_\nabla^2=0$ である．

10.3.2 共変微分を使うワイル－クリフォード代数

初めは局所座標近傍 U 上で考える．前節のやり方で μ-制御代数 $(\mathcal{F}_U^*[[\mu]];*)$ をつくっておく．$x^1,\cdots,x^n$ を N の開集合 U 上の局所座標系とし，$x^1,\cdots,x^n,y_1,\cdots,y_n$ を T^*U 上の局所座標系で $y_1,\cdots,y_n$ は各点 $p\in U$ での T_p^*U の線形基底 $dx^1,\cdots,dx^n$ に関する線形座標になっているものとする．$(\mathcal{F}_U^*;*)$ では変数 $y_1,\cdots,y_n$ は使われていないから，この変数を計量接続を利用して $\mathcal{F}_U^*$ に添加していくのである．そこで交換関係 $[a,b]=a*b-b*a$ を新しく

> [,] は交換子である．反交換子 $[a,b]_+=a*b+b*a$ は使われていない．

$$[y_i,\omega]=-[\omega,y_i]=\mu\nabla_{\partial_{x^i}}\omega \quad \left(\begin{array}{l}\text{本当は } \mu* \text{ と書くべきだが}\\ * \text{ を省略している.}\end{array}\right) \tag{10.17}$$

で付け加え，$[y_i,\ ]$ を $(\mathcal{F}_U^*[[\mu]];*)$ の微分として拡張する．共変微分の性質 (10.8) によりこれは問題ない．

$[y_i, dx^j] = -\mu\Gamma^j_{ik}dx^k$ であり，曲率テンソルの定義式 (2.11),(2.12) 式より

$$[y_i,[y_j,dx^k]]-[y_j,[y_i,dx^k]]=\mu^2(\nabla_i\nabla_j-\nabla_j\nabla_i)dx^k=\mu^2R_{ij\ell}^{\cdots k}dx^\ell$$

であるから，ヤコビ恒等式 $[y_i,[y_j,dx^k]]-[y_j,[y_i,dx^k]]=[[y_i,y_j],dx^k]$ に注意すると

$$\big[[y_i,y_j],dx^k\big]=-\mu^2R_{ijl}^{\cdots k}dx^l \tag{10.18}$$

が成立しなくてはならない．そこで $R_{ijab}=-R_{ijba}$ に注意すると

$$\begin{aligned}R_{ijab}[dx^a{\wedge}dx^b,dx^k]&=2\mu(R_{ijab}g^{bk}dx^a-R_{ijab}g^{ak}dx^b)\\&=4\mu R_{ij\ell}^{\cdots k}dx^\ell\end{aligned} \tag{10.19}$$

だから，これより

$$\Big[[y_i,y_j]+\frac{\mu}{4}R_{ijkl}(x)dx^k{\wedge}dx^l,\ dx^\ell\Big]=0 \tag{10.20}$$

でなければならないことがわかる．そこで

$$F_{ij}(x)=[y_i,y_j]-\frac{\mu}{4}R_{ijkl}(x)dx^k{\wedge}dx^l$$

とし，これが $(\mathcal{F}^*_U[[\mu]];*)$ の元であることを要請すれば，$\forall dx^\ell$ について $[F_{ij}(x),dx^\ell]=0$ だから $F_{ij}(x)$ は $(\mathcal{F}^*_M[[\mu]];*)$ の中心の元でなければならない．これに補題 10.4 を使うのだが，この場合は $m=2n$ だから $F_{ij}(x)\in\mathcal{F}^{(0)}_N[[\mu]]$ となる．一方

$$[y_i,[y_j,y_k]]=\mu\partial_iF_{jk}+\frac{\mu^2}{4}\nabla_{\partial_i}R_{jkmn}dx^m{\wedge}dx^n$$

であり，ヤコビ恒等式より $\mathfrak{S}_{(i,j,k)}[\xi_i,[\xi_j,\xi_k]]=0$ であるが，補題 2.3 を書き直したビアンキ恒等式 (10.13) より，曲率テンソルの入った項は消えるので

$$\mathfrak{S}_{(i,j,k)}\partial_iF_{jk}=0$$

でなければならないことがわかる．これは $\theta=F_{ij}dx^i{\wedge}dx^j$ が U 上の閉 2 次微分形式，$d\theta=0$ であることを意味する．

これで新しく付け加えた変数について交換法則が矛盾なく定義されたことになるから，次がわかる．

定理 10.4 μ-制御代数 $(\mathcal{F}_U^*[[\mu]];*)$ に関係式 $[y_i,\omega] = \mu\nabla_{\partial_i}\omega$, $[y_i,y_j] = F_{ij} - \frac{\mu}{4}R_{ijkl}dx^k{\wedge}dx^l$ で $y_1,\cdots,y_n$ を添加すると $(\mathcal{F}_U^*[[\mu]][y_1,\cdots,y_n];*)$ は μ-制御代数となる．ただし，$F_{ij}\in\mathcal{F}_N^{(0)}[[\mu]]$ で $\theta = F_{ij}dx^i{\wedge}dx^j$ は閉 2 次微分形式である．θ は U の閉 2 次微分形式であれば何でもよい．

U を多様体 N の座標近傍とし $x^1,\cdots,x^n$ を座標関数とする．T_U^* の座標系 $x^1,\cdots,x^n,y_1,\cdots,y_n$ とクリフォード代数の生成元 $dx^1,\cdots,dx^n$ でこの代数の基本関係を書くと次のようになる：

$$
\begin{aligned}
[x^i,x^j] = 0 = [x^i,dx^j], \quad & dx^i * dx^j = \mu dx^i{\wedge}dx^j + \mu^2 g^{ij}(x),\\
[y_j,x^i] = \mu\delta^i_j, \quad & [y_i,dx^k] = -\mu\Gamma^k_{il}(x)dx^l,\\
[y_i,y_j] = F_{ij}(x) + & \frac{\mu}{4}R_{ijkl}(x)dx^k{\wedge}dx^l.
\end{aligned}
\tag{10.21}
$$

10.3.3 大域化

10.3.2 項で考えた外微分環の量子化は局所座標系の上で行なったが，実はこれらはすべて多様体 N 全体に広げて考えられる．

N 上の接ベクトル場 $X = X^i(x)\partial_{x^i}$, $Y = Y^j(x)\partial_{x^j}$ は $C^\infty(N) = \mathcal{F}_N^{(0)}$ に働く作用素（微分）であったが，リー微分 $\mathcal{L}_X$ や共変微分 ∇_X などは外微分環 $(\mathcal{F}_N^*;\wedge)$ に働く作用素（微分）とも思える．一般に $\omega,\omega'\in\mathcal{F}_N^*$ とすれば

$$
\begin{aligned}
\mathcal{L}_X(\omega{\wedge}\omega') &= (\mathcal{L}_X\omega){\wedge}\omega' + \omega{\wedge}(\mathcal{L}_X\omega'),\\
\nabla_X(\omega{\wedge}\omega') &= (\nabla_X\omega){\wedge}\omega' + \omega{\wedge}(\nabla_X\omega')
\end{aligned}
$$

であるが，さらに接続が計量接続のときには ∇_X は $(\mathcal{F}_N^*;\wedge)$ の微分になっていると同時にクリフォード環 $(\mathcal{F}_N^*[[\mu]];*)$ の微分にもなっている．つまり

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X\omega)*\omega' &+ \omega*(\nabla_X\omega')\\
&= \mu(\nabla_X\omega){\wedge}\omega' + \mu\omega{\wedge}(\nabla_X\omega') + \mu^2\langle\nabla_X\omega,\omega'\rangle + \mu^2\langle\omega,\nabla_X\omega'\rangle\\
&= \nabla_X(\mu\omega{\wedge}\omega' + \mu^2\langle\omega,\omega'\rangle) = \nabla_X(\omega*\omega')
\end{aligned}
$$

などが成立する．リー微分にはこの性質はない．

微分作用素のときと同様に $\forall X,Y\in\mathcal{X}(N)$ に対し文字 ξ_X,ξ_Y などを考える．ξ_X などは次の性質を持つとする（C^∞-線形性，つまりテンソル性）：

$$
\xi_{fX+gY} = f{*}\xi_X + g{*}\xi_Y, \quad \forall f,g\in C^\infty(N).
$$

N 上の閉微分形式 θ を勝手に 1 つ選んで固定する．そして任意の $(\mathcal{F}_M^*[[\mu]];*)$ の元 ω との間に交換法則 $[\xi_X,\omega]=\mu\nabla_X\omega$ を導入し

$$[\xi_X,\xi_Y]=\theta(X,Y)+\mu\xi_{[X,Y]}+\frac{\mu}{4}\Omega(X,Y) \tag{10.22}$$

と定義する．ヤコビ恒等式 $\sum_{(X,Y,Z)}[\xi_X,[\xi_Y,\xi_Z]]=0$ は局所的計算でわかっているから，これで結合代数が生成される．この代数を $(\mathcal{F}_N^*[T_N^*][[\mu]];*)$ のように書く．

命題 10.1 $(\mathcal{F}_N^*[T_N^*][[\mu]];*)$ は偶奇性のある結合代数であり，前項で与えたものはこの代数の局所座標系による表示である．

$\xi_{\mathcal{X}(N)}=\{\xi_X; X\in\mathcal{X}(N)\}$ とすると，これまでの考察から次がわかる．

系 10.1 $\mathfrak{g}=\xi_{\mathcal{X}(N)}\oplus\mathcal{F}_N^*$ は括弧積 $\mu^{-1}[\ ,\ ]$ に関してリー環となる．定義のしかたから自然に $\pi:\xi_X\to X$ は $\mathfrak{g}$ から $\mathcal{X}(N)$ の上への（リー環の）準同型となり，$\mathrm{Ker}\,\pi$ は $\mathcal{F}_N^*$ である．

注意 10.1 $\mu R_{ijkl}dx^k\wedge dx^l$ の項が出てくるために $(x^1,\cdots,x^n,y_1,\cdots,y_n)$ は $*$-積で閉じないで，偶数次の微分形式を含んで閉じる．これはワイル代数の super 化のような形である．

この場合 g^{ij},Γ_{ik}^j が $x=(x^1,\cdots,x^n)$ のみの関数になっているという仮定が重要である．F_{ij} は局所的に定義したが，局所的にはポアンカレの補題を使って $\theta=d\eta,\ \eta=A_i(x)dx^i$ となる 1 次微分形式を見つけられる．すると y_i を y_i-A_i に置き換えると F_{ij} の項は局所的には消してしまうこともできる．

> この節で考えた μ-制御代数の始めのほうの項に古典電磁場とか計量テンソルにまつわるものを曲率テンソルの形で含ませることができる．古典電磁場は $\delta\int_N\|F\|dV=0$, 古典重力場は $\int_N dV=$（一定）として $\delta\int_N\|R\|dV=0$ という変分方程式を満たしていることが知られている．
> 量子化された電磁場，重力場は上の変分方程式を第 1 次近似として含まねばならない．さらにこれの量子化を考えるときには上の変分方程式をハミルトン方程式のような発展方程式の形に書き直さなければならない．

注意 10.2 ローレンツ計量の入った 4 次元配位空間 N を物理では“時空”と呼ぶことがある．さらに古典電磁場は電荷電流密度と呼ばれる 3 次微分形式 $4\pi\omega_\rho$ が与えられたとき N 上の 2 次の微分形式 Ω で

$$d_\nabla\Omega=0,\quad d_\nabla *_H\Omega=4\pi\omega_\rho\quad (*_H \text{ は補題 10.5 のホッジ作用素})$$

を満たすものとして与えられる．これをマクスウェルの方程式という．これは変分法の解として得られる．$N=\mathbb{R}\times S$ のとき

$$\omega_\rho=\rho(t,x)dx^1{\wedge}dx^2{\wedge}dx^3+dt{\wedge}(\sum J_{ij}(t,x)dx^i{\wedge}dx^j),$$
$$\Omega=\sum H_{ij}dx^i{\wedge}dx^j+dt{\wedge}\sum E_i dx^i$$

のように時間方向 dt を含まないものと含むものとに分けて書き $\rho(t,x)$ を電荷密度，$J=J_{ij}(t,x)dx^i{\wedge}dx^j$ を電流密度（これは電流の流束ベクトル（流速ベクトルではない）），$\sum H_{ij}dx^i{\wedge}dx^j$ を磁束密度，$\sum E_i dx^i$ を電場と呼ぶ．

電磁気における $\mathbf{E},\mathbf{H}$ の理論と $\mathbf{D},\mathbf{B}$ の理論は数学的に見れば同型に見えるものである．つまり，「媒質」と呼ばれているものと，「真空」と呼ばれているものは数学的には区別できないものであって，どちらを真空と呼んでもよいものである．

10.4　超多様体

この節で次の定理を証明する．

定理 10.5　$(\mathcal{F}^*_N[T^*_N][[\mu]];*)$ は局所的には $(C^\infty(U)[[\mu]]\otimes C^n_Q;*)$ と同型である．しかも超多様体[1]になっている．

μ-制御代数 $(\mathcal{F}^*_N[T^*_N][[\mu]];*)$ が局所的につくった μ-制御代数 $(\mathcal{F}^*_U[T^*_U][[\mu]];*)$ の貼り合わせになっていることはつくられ方から明らかであろうが，実は $(\mathcal{F}^*_U[T^*_U][[\mu]];*)$ は $(C^\infty(U)[[\mu]]\otimes C^n_Q;*)$ と同型になっていると言っているのである．貼り合わせ方は y_i を y_i+（2 次の微分形式）のような超多様体の貼り合わせになっているのである．これを示すには共変微分や曲率テンソルの見方を少し変更しなければならない．

10.4.1　無限小平行移動

ワイル代数のモイヤル積と同様にクリフォード積でも 2 次のところの計算がかなり特別な意味を持つ．話は局所的に行なってよいので，正規直交基底の場を使って話をする．

1)　1.4 節の囲み欄 (super) 参照．

接続の理解

接続の理解のしかたは大きく分けて 3 種類ある．

- 微分法と見る（第 2 章の定義による見方）．
- 何が 1 次式であるかを決めている（4.2.3 項参照）．
- 基底の無限小平行移動と見る（この節での見方）．

N をリーマン多様体とし，$\forall p \in N$ に対して U を p の指数写像 $\mathrm{Exp}_p : T_pN \to N$ の，単射半径内にある 0 の近傍の像とし，$e^1, \cdots, e^n \in \mathcal{F}_U^{(1)}$ を各点 $q \in U$ で T_q^*N の（$g^{ij}(q)$ に関する）正規直交基底 (orthonormal frame) となるようなものとする．このようなものをつくるにはまず，p のところで正規直交基底 $e^1(p), \cdots, e^n(p)$ をとり，これを $q = \mathrm{Exp}_pX$ と p とを結ぶ測地線 Exp_ptX に沿って平行移動すればよい．$e^1, \cdots, e^n$ を U 上の**正規直交基底の場**と呼ぶ．さらに $e_1, \cdots, e_n$ を $e^1, \cdots, e^n$ の双対基底の場とするが，これは自然に $e^1, \cdots, e^n$ と同一視してよい．このつくり方から点 p においては

$$(\nabla_X e^i)(p) = 0 \tag{10.23}$$

である．U の各点で

$$(e^i \wedge e^j) * e^k = e^i \wedge e^j \wedge e^k + \mu\delta_{jk}e^i - \mu\delta_{ik}e^j,$$
$$e^k * (e^i \wedge e^j) = e^k \wedge e^i \wedge e^j + \mu\delta_{ki}e^j - \mu\delta_{kj}e^i$$

だから，$[e^i \wedge e^j, e^k] = 2\mu(\delta_{jk}e^i - \delta_{ki}e^j)$ であり，これは $v = \sum_k v_k e^k$ とすると $\left[\frac{1}{2\mu}e^i \wedge e^j, v\right] = v_j e^i - v_i e^j$ だから行列表示して考えてみれば $\left[\frac{1}{2\mu}e^i \wedge e^j,\ \cdot\ \right]$ の線形結合ですべての歪対称行列が得られることがわかる．

また，$\left[\frac{1}{2\mu}e^i \wedge e^j,\ \cdot\ \right]$ は微分として $(\mathcal{F}_U^*; \wedge)$ に拡張される．

一般に，正規直交基底を使って 2 次微分形式を

$$\theta = \frac{1}{2}\sum_{i,j} a_{ij}e^i \wedge e^j, \quad \eta = \frac{1}{2}\sum_{k,l} b_{kl}e^k \wedge e^l \quad ((a_{ij}), (b_{kl}) \text{ は歪対称行列})$$

と書いたときには $[\theta, \eta] = \mu\sum_m (a_{im}b_{mj} - a_{jm}b_{mi})e^i \wedge e^j$ のようになる．つまり，行列としての交換子積がクリフォード代数の交換子積で実現されているのである．歪対称行列の交換子積は歪対称行列である．

補題 10.6　$\forall\omega \in \mathcal{F}_N^{(2)}$ について $\mathrm{ad}\left(\frac{1}{\mu}\omega\right)$ は次数を保つ $(\mathcal{F}_N^*[[\mu]];*)$ の微分であり，$\forall\omega', \omega'' \in \mathcal{F}_N^{(1)}$ に対して

$$\langle\frac{1}{\mu}[\omega,\omega'],\omega''\rangle + \langle\omega,\frac{1}{\mu}[\omega',\omega'']\rangle = 0$$

である．また $\frac{1}{\mu}\mathcal{F}_N^{(2)}$ は $[\ ,\ ]$ に関してリー環となる．このリー環は N の任意の点 q で計量 Q に関する直交変換群 $SO_Q(T_q^*N)$ のリー環である．

証明　$\mu^{-1}[\omega{\wedge}\omega',\omega''] = 2\langle\omega',\omega''\rangle\omega - 2\langle\omega,\omega''\rangle\omega'$ だから次数を保つ微分であることは明らか．後のことも局所的な計算から考えれば容易であろう．

（証明終わり）

曲率テンソルを使って

$$\Omega(X,Y) = X^iY^jR_{ijkl}dx^k{\wedge}dx^l \in \mathcal{F}_N^{(2)} \tag{10.24}$$

と定義する．これを使うと $R(X,Y)(\omega)$ がクリフォードの積で実現できる．

補題 10.7　$R(X,Y) = -\mathrm{ad}(\frac{1}{4\mu}\Omega(X,Y))$ である．

証明　$[\Omega(X,Y),dx^m] = X^iY^jR_{ijkl}[dx^k{\wedge}dx^l,dx^m]$ だから (10.19) 式より

$$[\Omega(X,Y),dx^m] = 4\mu X^iY^jR_{ij\ell}^{\cdot\cdot\cdot m}dx^\ell = -4\mu R(X,Y)dx^m$$

である．

（証明終わり）

次に大域的な立場で (10.22) 式の定義が正しいことを確認しておこう．$\forall\omega \in \mathcal{F}_N^*$ に対して $[\xi_X,\omega] = \mu\nabla_X\omega$ より

$$[[\xi_X,\xi_Y],\omega] = \mu^2[\nabla_X,\nabla_Y]\omega = \mu[\xi_{[X,Y]},\omega] - \mu^2R(X,Y)\omega$$

だからこれに (10.24) 式，補題 10.7 を使って

$$\Big[[\xi_X,\xi_Y],\omega\Big] = \mu\Big[\xi_{[X,Y]} + \frac{1}{4}\Omega(X,Y),\ \omega\Big] \tag{10.25}$$

だが，(10.22) 式の定義より

$$\Big[[\xi_X,\xi_Y],\omega\Big] = \Big[\theta(X,Y) + \mu\xi_{[X,X]} + \frac{\mu}{4}\Omega(X,Y),\omega\Big] \tag{10.26}$$

であり，見比べると $[\theta(X,Y),\omega]=0$ であるが，$\theta(X,Y)\in\mathcal{F}_N^{(0)}$ だからこれは成立している．ヤコビ恒等式から θ は閉微分形式である．

これまでは接続を微分法と理解してきたが，これを**無限小平行移動**と考えることにする．T_U^* の正規直交基底の場を X 方向へ共変微分すると

$$\nabla_X(e^1,\cdots,e^n)_p=(e^1,\cdots,e^n)_p\Theta(X),\quad \nabla_{e_i}e^j=\Theta_{i|jk}e^k$$

となるが，∇_X が内積を変えないから $\Theta(X)$ は歪対称行列となる．補題 10.6 より $\Theta(X)=\mu^{-1}\mathrm{ad}(L(X))$ となる 2 次微分形式 $L(X)$ を一意的に選ぶことができる．(10.23) 式より $\Theta(X)(p)=0$ だから $L(X)(p)=0$ である．

こう見てしまうと $L(X)$ は局所的に選んだ正規直交基底の場に依存することになるが，正規直交基底の場を任意に選んでおいても $\Theta(X)$ が歪対称行列となることにはかわりはない．すると上の $L(X)$ は $L(X;e^1,\cdots,e^n)$ のようにいつも正規直交基底の場を込みにして書くべき概念ということになる．ここから**主束** (principal bundle) という概念が出てくるのだが，これを解説するのはブルバキ的教科書にゆずるとして，このまま感覚的説明を続ける．

注意 10.3

$$\nabla_X e^k=\mu^{-1}[L(X),e^k],\quad L(X)\in\mathcal{F}_N^{(2)} \tag{10.27}$$

と書いてもよいのだが，こう書くと誤解の種である．$\nabla_X fe^k=(Xf)e^k+f\nabla_X e^k$ であるのに対し，$[L(X),fe^k]=f[L(X),e^k]$ であるから $\forall\omega\in\mathcal{F}_N^{(1)}$ に対して等式 (10.27) が成立するのではない．(10.27) 式は $(e^1,\cdots,e^n)_p$ を $X\in T_p^*N$ 方向へ無限小だけ平行移動したときどうなるかを述べている式，あるいは $(e^1,\cdots,e^n)_p$ のところでの水平分布 (horizontal distribution) を表している式なのである．

すると (10.22) 式で新しく添加した変数 ξ_X と 2 次微分形式 $L(X)$ との間には $\forall e^k$ について $[\xi_X-L(X),e^k]=0$ という関係がなければならない．注意すべきは $f\in\mathcal{F}_N^{(0)}$ に対して $[\xi_X,f]=Xf$ だが，$[L(X),f]=0$ ということである．実は次の定理が成立する．

定理 10.6　(10.22) 式の θ が完全形式，つまり $\theta(X,Y)=X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])$ の場合には

$$\frac{1}{\mu}[\xi_X-L(X)+\eta(X),\xi_Y-L(Y)+\eta(Y)]=\xi_{[X,Y]}-L([X,Y])+\eta([X,Y]) \tag{10.28}$$

が成立する．

証明　与えられた条件と，(10.22) 式を用いて左辺を計算すると

$$\eta([X,Y]) + \xi_{[X,Y]} + \frac{\mu}{4}\Omega(X,Y) \\ -\mu\nabla_X L(Y) + \mu\nabla_Y L(X) + [L(X), L(Y)]$$

であるが，曲率テンソルの定義式より $\forall\omega \in \mathcal{F}_N^*$ について

$$\nabla_X[L(Y),\omega] - \nabla_Y[L(X),\omega] = [L([X,Y]),\omega] + [\frac{1}{4}\Omega(X,Y),\omega]$$

であるが，上の式は

$$\Big[\nabla_X L(Y) - \nabla_Y L(X) - \frac{1}{\mu}[L(X),L(Y)] - L([X,Y]) - \frac{1}{4}\Omega(X,Y),\,\omega\Big] = 0$$

とも書かれるが，2 次微分形式が満たすべき式だから一意性より

$$\mu\nabla_X L(Y) - \mu\nabla_Y L(X) - \frac{\mu}{4}\Omega(X,Y) - [L(X),L(Y)] = L([X,Y])$$

という等式が得られる．これを代入すればよい．　　　　　　　　(証明終わり)

上の定理では $\theta = d\eta$ を仮定しているが，これは局所的にはポアンカレの補題により成立する：$[\partial_{x^i}, \partial_{x^j}] = 0$ だから，(10.28) 式の右辺は 0 である．

系 10.2　$L_i = L(\partial_{x^i})$，$\eta_i = \eta(\partial_{x^i})$ とし，$\hat{y}_i = \xi_i - L_i + \eta_i$ とおけば $x^1, \cdots, x^n, \hat{y}_1, \cdots, \hat{y}_n, e^1, \cdots, e^n$ は局所生成元となり次が成立する：

$$[x^i, x^j] = 0 = [x^i, e^j],\ e^i * e^j = \mu e^i \wedge e^j + \mu^2 \varepsilon_i \delta^{ij},$$
$$[\hat{y}_j, x^i] = \mu\delta^i_j,\ [\hat{y}_i, e^k] = 0 = [\hat{y}_i, \hat{y}_j].$$

局所的に考えている代数 $(\mathcal{F}_U^*[T_U^*][[\mu]];*)$ はワイル代数 $(C^\infty(T_U^*)[[\mu]];*)$ とクリフォード代数 $(C_Q^n;*)$ のテンソル積 $(C^\infty(T_U^*)[[\mu]]\otimes C_Q^n;*)$ と同型になっているのである．

> $\mathrm{ad}(\hat{y}_i)$ を共変微分のように思ってしまうと e^i のようなクリフォードの元は全部平行に見えてしまい，この共変微分による曲率は 0 のように見える．

局所生成系の変換則

ここで $y_i = \hat{y}_i + L_i - \eta_i$ と置き換えるのは代数的には問題ないとしても，y_i は余接束空間の座標関数であり，L_i は $\mathcal{F}_U^{(2)}$ の元であるから y_i と L_i とは N の局所座標変換に対する変換性がかなり違う．つまり $y_i - L_i$ を N 上のテンソルとして扱うことはできないのである．古典微分幾何のイメージに従えばまったく違うものとしなければならない．系 10.2 で使われている局所生成元への変換が超変換になっていることはわかるであろう．

10.4.2 外微分

外微分

なにげなく使ってきたが，外微分の役目は何だっただろう？　おそらく，外微分の役目は無限小で書いたストークスの定理といったところであろう．$D^2\omega = 0$ となるようなものがつくれると，それをもとにしてガウス－ストークスの定理に相当するものが考えられるであろう．古典的ガウス－ストークスの定理には積分（線積分，面積分）の概念が入ってくるのだが D を用いてこのようなものをつくったとき，積分される領域にあたるものとして出てくるもの（これは必ずしも点集合とは限らないだろうが $\cdots$）が新しい点概念を与えるものであろう．

$C^\infty(T_U^*)[[\mu]]\otimes C_Q^n$ の元は多重添字を使って

$$f = \sum \mu^k f_{k,\alpha,\varepsilon}(x) * \hat{y}^\alpha * e^\varepsilon, \quad \hat{y}^\alpha = \hat{y}_1^{\alpha_1} \cdots \hat{y}_n^{\alpha_n}, \quad e^\varepsilon = e^{i_1}\wedge \cdots \wedge e^{i_p}$$

のように書かれる．

共変微分は無限小平行移動と思うと代数 $(\mathcal{F}_U^*[T_U^*][[\mu]]; *)$ の中で書くことができたのだが，今度は外微分を書いてみよう．$\omega = \sum_{k,\varepsilon} \mu^k f_{k,\varepsilon}(x) e^\varepsilon$ に対して外微分は

$$d\omega = \sum_{k,i,\varepsilon} \mu^k (\partial_i f_{k,\varepsilon}) dx^i \wedge e^\varepsilon$$

で定義されるから，$f \in C^\infty(U)$ として

$$[y_i, f(x) * e^\varepsilon] = \mu(\partial_{x^i} f) * e^\varepsilon + f(x) * [y_i, e^\varepsilon] = \mu(\partial_{x^i} f) * e^\varepsilon + f(x) * [L_i, e^\varepsilon]$$

に注目すると，$dx^i = B_j^i(x) e^k$ として $d\omega = \frac{1}{\mu} B_j^i e^j \wedge [y_i - L_i, \omega]$ と書かれる．

$L_i = L(\partial_{x^i})$ であり，$B^i_j L_i = L(e_i)$ だから，記号を合わせて $\xi_j = B^i_j y_i$ とすれば外微分は一応

$$d\omega = \frac{1}{\mu} e^j {\wedge} [\xi_j, \omega] - \frac{1}{\mu} e^j {\wedge} [L(e_j), \omega] \tag{10.29}$$

と書かれるが，この書き方では $e^j{\wedge}$ という $*$-積以外の演算が使われている．

これを $*$-積だけを使って書くには次の式に注意すればよい：

$$e^i * \omega + (-1)^{p(\omega)} \omega * e^i = 2\mu^{p(\omega)} e^i {\wedge} \omega. \tag{10.30}$$

この式を使って $e^i{\wedge}$ という演算が $*$-積を使って定義されていると思えば (10.29) 式のままでもよい．

> (10.30) 式のような偶奇性を加味したブラケット積を定義してやると，逆モイヤル積公式のときと同様に $*$-積のほうから ${\wedge}$-積がつくられるのである．

η_i のパリティを 0 として $\omega, \omega' \in \mathcal{F}^*_N[T^*_N][[\mu]]$ に対して

$$\{\omega, \omega'\}_* = \omega * \omega' - (-1)^{p(\omega)p(\omega')} \omega' * \omega$$

と定義する．

命題 10.2　外微分は自然に $d : \mathcal{F}^*_N[T^*_N][[\mu]] \to \mathcal{F}^*_N[T^*_N][[\mu]]$ に拡張され，$d^2 = 0$ であり，超微分の性質を持つ：

$$d(d\omega) = 0, \quad d(\omega * \omega') = (d\omega) * \omega' + (-1)^{p(\omega)} \omega * (d\omega').$$

> おそらく場の理論の発散の困難を救うべく数学は再構成されなければならないのである．この動きを物理の側の動きと見ていては数学は足元をすくわれるのである．

齟齬を許した代数束

この章では多様体（配位空間）上でうまく貼り合うことを規準にしているのだが，前の方で出てきた「多価の元」を許す考え方をすると，貼り合わせに齟齬があるほうが自然に見えてくる．この章で述べたことは齟齬を許した代数束のようなところで考えたほうがもっと自由になると思われるのである．

量子論で数学者を悩ませるものに「シュレーディンガーの猫」というのがある．「観測」ということの数学的定義はないのだから，数学的に理解できないのは当然ではあるが，多価性のあるところで書かれる理論は確率論的（あるいは平均論的）にならざるを得ないが，表現論は「何を見たいのか」をはっきりさせないとつくれない局所的なものであると思うとなんとなくわかったような気がしてくる．

理論を書く場所と，表現論を分けて考えるべきだということを，多価性は要求しているとみているのである．これはたとえばメビウスの帯の上では裏表という概念は全体を見渡してしまうとつくれないが，局所的にはつくることができることに似ている．しかし，局所的には区別できるといったが，問題はその数学的内容である．

奇妙に見えているのは，まだわれわれのものの考え方が及ばないためであって，現実に即した考え方をすれば素直な見方は出てくるはずであるが，その現実が何であるのかよくわからないのである．

多価の元は取り扱いが難しいが，積については多価のままで

$$a^\lambda b^\lambda = (ab)^\lambda, \quad (a^\lambda)^\mu = a^{\lambda\mu}$$

のように計算される．面倒なのは加法（足し算）で多価のままで $a^\lambda + b^\lambda$ のようなものを定義してしまうと，$\{\pm 1\}+\{\pm 1\}$ は $\{2, 0, -2\}$ としなければならないだろうから，足し算をするたびに多価性が増して，いろいろ不都合なことが起こる．

これでは多価の元はほとんど扱えないのだが，現れてきた多価の元はよく見ると，系全体の中では多価性を構成している個々のものは区別ができないとしても，局所的には区別して扱うことができるものばかりである．

第11章　点集合を超えた世界

数学の側から物理学を見るとき,「観測値の問題」「統計的理解」とか「どうしてボゾンとフェルミオンという2種類のものが混在しているのか」とか「時間に関する対称性はなぜ破れているのか」といった原理的な問題が気にならない人はいないであろうが，最もわからないのは「時間」の概念である．これらはいずれも「実在とは？」という深い哲学の問題に係わっている．

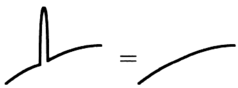
こんな答えのない哲学的問題に捉えられて涅槃の境地に浮遊するのは非生産的であるとするのももっともな話ではあるのだが，しかし落ち着いて考えてみると，こういうものに物理学者が何か答えを書いたとして，その表現形式は微積分の枠を超えるものであり得るだろうか？　むろんここでいっている微積分とは実数論の基礎の上に立つ微積分学の基礎理論のことではなく拡張された微積分演算子のつくる非可換系のことである．

つまりどんなに立派な理論であったとしてもその理論は（神秘的な記号でも使うなら別だが）“物理”という限り微積分の大枠は超えないのである．これが物理というものの宿命である．（微積分の大枠からはみだしている理論を人は物理だとは言わないだろう．）

11.1 齟齬と曖昧束

2.2 節で多様体とは接続の存在とか常微分方程式の解の存在を保証するために持ち込まれた必要悪であると述べた．この節で（前に定義した）多様体にはなっていない "多様体" の概念を定義する．これまでのものと違ってこれは点集合をなしていないのであるが，7.1 節で述べたことを説明しようとすると必要になる概念である．話を始める前にホモトピー的頭の使い方を少し練習しよう．

$C(X)$ を単位区間 $I = [0,1]$ から位相空間 X への連続写像の全体とする．$C(X)$ の元 c, c' が始・終点を固定したパラメーターの付け変えだけで重なるとき**同じ**曲線と呼ぶ．また左の図のように同じところを行きつ戻りつする部分は取り除いてよいと約束する．このような同値関係を**基礎的同値関係**と呼びこの同値類をたんに**連続曲線**と呼ぶ．パラメーターの向き，連続性には注目するが像のほうしか注目していないことを理解してほしい．



$C(X)$ の元 c, c' が $c(1) = c'(0)$ のとき c と c' をつないだ曲線 $c'{\circ}c$ は

$$(c'{\circ}c)(t) = \begin{cases} c(2t) & (0 \leq t \leq 1/2) \\ c'(2t-1) & (1/2 \leq t \leq 1) \end{cases}$$

の基礎的同値類のことである．$c, c', c'' \in C(X)$ について $c(1) = c'(0), c'(1) = c''(0)$ のとき，写像の定義だけからすると $(c''{\circ}c'){\circ}c \neq c''{\circ}(c'{\circ}c)$ だが，基礎的同値類を考えれば $(c''{\circ}c'){\circ}c = c''{\circ}(c'{\circ}c)$ である．さらに c^{-1} は $c(1-t)$ で定義される曲線のこととする．

$c(0) = c'(0), c(1) = c'(1)$ であるような 2 つの連続曲線 c, c' が始終点を固定したまま連続的に一方から他方へ変形できるとき**ホモトープ** (homotope) という．

X の 1 点 o を任意に選んで固定しておく．$C_o(X)$ を o を始点とする F の連続曲線の全体とする．また $\Omega_o(X)$ を始点，終点がともに o であるような連続曲線（閉曲線）の全体とする．基礎的同値関係による同値類で考えているので $\Omega_o(X)$ は曲線のつなぎ合わせを積として群になっている．

$C_o(X)$ の元をホモトープなものは同じと見るという同値関係で類別した同値類の全体は X の**普遍被覆空間**と呼ばれる．これを $\tilde{X}$ と書く．$\tilde{X}$ は X が C^∞-多様体ならば C^∞-多様体であるが $\Omega_o(X)$ の元をホモトープなものは同じと見るという同値関係で類別した同値類の全体は群をなす．これは X の**基本群**と呼ばれ，

$\pi_1(X;o)$ と書かれる．この群は一般に非可換群である．$\tilde{X}$ には基本群 $\pi_1(X;o)$ が自然に作用しているのでこの作用で同値関係を入れれば $\tilde{X}/\pi_1(X;o)=X$ である．$\pi_1(X;o)$ の正規部分群 N をとりこの N を使って同値関係を定義すれば $\tilde{X}/N$ は X の被覆空間となる．X の被覆空間はみなこのようにして得られる．

11.1.1　可微分曖昧束

3.3.3 項の C^∞-局所自明曖昧ベクトル束の概念にもっと精密な定義を与えておこう．N, F を連結な C^∞-多様体とし，$\forall p\in N$ ごとに F と可微分同相な C^∞-多様体 F_p を用意する．この場合 F と F_p の間に可微分同相を $\phi_p : F\to F_p$ のように記号化しておく．$p\neq p'$ のときには F_p と $F_{p'}$ は共通部分などまったくないものとする．3.3.3 項と同様に直和集合 $\coprod_{p\in N}F_p$ を考え，**曖昧束**と呼んでおく．曖昧束では $\pi(q;v)=q$ という写像 $\pi:\coprod_{p\in N}F_p\to N$ が自然に定義されるから，N の部分集合 U に対して $\pi^{-1}(U)=\coprod_{q\in U}F_q$ が考えられる．さらに写像 $g:\coprod_{q\in U}F_q\to\coprod_{q\in U}F'_q$ で $g(q;v)=(q;d_q(v))$ で各 $d_q:F_q\to F'_q$ が可微分同相となっているような写像の概念も自然に定義される．このような写像を**曖昧束同型**と呼ぶが，q に関する微分可能性はおろか**連続性も要求していない**ことに注意してほしい．

定義 11.1　U を N の開集合とする．写像 $\psi:U\times F\to\pi^{-1}(U)$ が $\coprod_{p\in N}F_p$ の**局所自明化**であるとは $\psi(q,y)=(q;\psi_q(y))$ であり，$\psi_q:F\to F_q$ が可微分同相となる場合をいう．局所自明化をともなった N の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ が与えられた曖昧束を**局所自明曖昧束**と呼ぶ．

$\coprod_{p\in N}F_p$ を局所自明曖昧束とし，U の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha\in I}$ の各 U_α 上で局所自明化 $\psi_\alpha:U_\alpha\times F\to\pi^{-1}(U_\alpha)$ が与えられているとする．記号を簡単にするため (3.13),(3.14) 式のような記号を用いる．まず，普通の C^∞-ファイバー束が曖昧束の言葉ではどのように定義されるか考えよう．

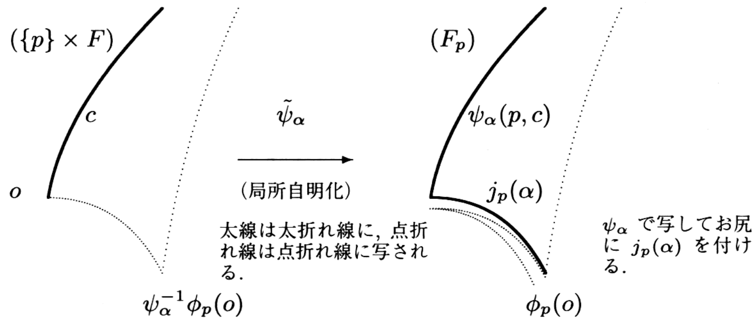
定義 11.2　$\coprod_{p\in N}F_p$ が**局所自明 C^∞-束**であるとは各 $U_{\alpha\beta}\neq\emptyset$ 上で曖昧束同型 $\Psi_{\alpha\beta}=\psi_\beta^{-1}\psi_\alpha:U_{\alpha\beta}\times F\to U_{\beta\alpha}\times F$ が C^∞-写像となる場合をいう．$\Psi_{\alpha\beta}$ を**局所座標変換**と呼ぶ．

局所自明 C^∞-束では $\coprod_{p\in N}F_p$ は自然に C^∞-多様体になっている．

そこで，ここでは C^∞-局所自明曖昧束なるものを抽象的に定義するのはやめて多様体 C^∞-束 $\coprod_{p\in N}F_p$ をもとにして実例を構成する．

F と F_p は可微分同相 $\phi_p : F \to F_p$ を通じて同一視されるから，上のことはすべて F_p 上の話に置き換えられる．C^∞-ファイバー束 $\coprod_{p\in N} F_p$ が与えられているとして集合 $\coprod_{p\in N} C_{\phi_p(o)}(F_p)$，および $\coprod_{p\in N} \tilde{F}_p$ がこれから考える対象である．

$\Pi : \coprod_{p\in N} C_{\phi_p(o)}(F) \to N$ を自然な射影とする．$\coprod_{p\in N} F_p$ の局所自明化 $\psi_\alpha : U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ に対して $\coprod_{p\in N} C_{\phi_p(o)}(F)$ の局所自明化 $\tilde{\psi}_\alpha : U_\alpha \times C_o(F) \to \Pi^{-1}(U_\alpha)$ を $\tilde{\psi}_\alpha(p, c) = (p; \psi_\alpha(p, c) \circ j_p(\alpha))$ と定義する．



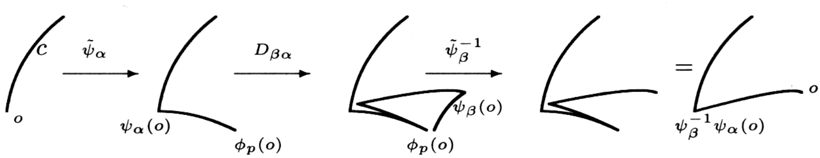
ただし $j_p(\alpha)$ は $\phi_p(o)$ と $\psi_\alpha(p, o)$ とを F_p 内で結ぶ（勝手に選んで固定した）連続曲線である．

$U_{\beta\alpha} \neq \emptyset$ のとき $\forall p \in U_{\beta\alpha}$ に対し $\psi_\beta(p, o)$ を始点とし $\psi_\alpha(p, o)$ を終点とする F_p 内の連続曲線 $k_p(\alpha\beta)$ を任意に，しかし $p \in U_{\beta\alpha}$ に関して C^∞ となるように選んでおく．これを使って曖昧束同型 $D_{\beta\alpha} : \Pi^{-1}(U_{\alpha\beta}) \to \Pi^{-1}(U_{\beta\alpha})$ を

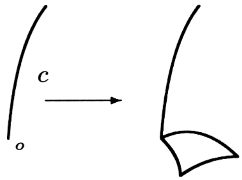
$$D_{\beta\alpha}(c) = c \circ j_p(\alpha)^{-1} \circ k_p(\alpha\beta) \circ j_p(\beta)$$

曲線のつなぎ合わせとして理解するには右から読んでいくとよい．

と定義する．すると $\tilde{\psi}_\beta^{-1} D_{\beta\alpha} \tilde{\psi}_\alpha(p, c)$ のイメージ図は次のようになる：



これより $\tilde{\psi}_\beta^{-1} D_{\beta\alpha} \tilde{\psi}_\alpha(p, c)$ は ϕ_p の部分がなくなって p に関する C^∞-性が出てくることがわかる．3.3.3 項のときと同じく**こちらのほうを貼り合わせの写像だと思うのである**．しかし，一般にこの貼り合わせは齟齬をきたしていて $D_{\alpha\beta\gamma} \neq 1$ である．その理由は次のイメージ図から理解してほしい．



$D_{\alpha\beta\gamma}$ を求めてみると，c のお尻の o のところに $k_p(\alpha\beta)\circ k_p(\beta\gamma)\circ k_p(\gamma\alpha)$ という閉曲線がつながってしまうのである．これが基礎的同値類の中で一般に消えないことはほぼ明らかであろうが，ホモトピー類で考えても c と $\psi_\alpha^{-1}D_{\alpha\beta\gamma}\psi_\alpha(c)$ が一致しないことがあるわけである．

上の話をホモトピー同値類で考えることは容易であろう．

曖昧束同型 $\Psi : \coprod_{p\in N}\tilde{F}_p \to \coprod_{p\in N}\tilde{F'}_p$ が各局所自明化を通して見たとき，C^∞-写像に見えるときを C^∞-**同値**と呼ぶ．

$\coprod_{p\in N}\tilde{F}_p$ は一般には多様体ではないが，$\coprod_{p\in N}F_p$ の被覆空間と呼べるようなものなので**曖昧被覆空間**と呼ぶ．

11.1.2　曖昧主束群，曖昧被覆群

曖昧束の考え方は位相群の場合にも適用できる．G を距離化群とし G の単位元を e とする．H を閉部分群とする．均質空間 G/H や自然な射影 $\pi : G \to G/H$ は 1.2.2 項で定義してある．G/H の元は $\pi(g)$ とか $[gH]$ のように書かれるが，これを $p \in G/H$ のように書いたとき，gH のことを H_p と書くことにする．すると 3.3.1 項で述べたファイバー束の書き方で $G = \coprod_{p\in G/H}H_p$ と書かれる．$\pi : \coprod_{p\in G/H}H_p \to G/H$ を自然な射影とする．群 H は自然に各 H_p に右から作用している（G 自身を G/H 上の H-主束と見ているのである）．

$p \in G/H$ を与えたとき $g \in G$ を選んで $p = [gH]$ と書かれてはいるが，g の選び方は一意的ではない．そこで記法を一定にするために $p \in G/H$ ごとに $\phi_p \in G$ を決めて $p = [\phi_p H]$ となるようにしておく．つまり，ϕ_p を左からかける写像 $\phi_p : H \to H_p$ で H と H_p を同一視しておく．しかし ϕ_p は p に関して連続にとる必要はないし，一般にそれは不可能である．各 H_p 上で始点を選んで連続曲線を考えるときには始点として $\phi_p \in H_p$ を選ぶのである．ϕ_p を使えば $\forall g \in G$ は $g = (\pi(g); \phi_{\pi(g)}(\phi_{\pi(g)}^{-1}g)) \in \coprod_{p\in G/H}H_p$ と書かれる．

G/H の任意の開集合 U に対し $\pi^{-1}(U) = \coprod_{p\in U}H_p$ が考えられる．一般に H の右からの作用が与えられた曖昧束 $\coprod_{p\in U}E_p$, $\coprod_{p\in U}F_p$ が与えられたとき，曖昧束同型 $\sigma : \coprod_{p\in U}E_p \to \coprod_{p\in U}F_p$ が $\forall h \in H$ に対して $\sigma(p; xh) = \sigma(p; x)h$ という性質を持つとき**作用付曖昧束同型**であるという．

閉部分群 H が G の**正則閉部分群**であるとは，上の ϕ_p にあたるものが局所的にならば p に関して連続にとれる H のことで，$\forall p \in G/H$ で p の近傍 U と $U \times H$ から $\coprod_{q\in U} H_q$ への双連続な作用付束同型 $\psi : U \times H \to \coprod_{q\in U} H_q$ がとれる場合をいう．これは $G = \coprod_{p\in G/H} H_p$ が主ファイバー束になっているということでこのようなとき U を**座標近傍**[1]と呼ぶ．これを $\coprod_{p\in G/H} H_p$ の局所自明化と呼ぶ．この場合一般に $\psi(q,e) \neq \phi_q$ であることを注意しておいてほしい．

注意 11.1　G が有限次元リー群，またはしかるべき条件を満たす無限次元リー群のときには G/H は C^∞-多様体（無限次元かもしれない）となり微分写像 $d\pi_g : T_gH \to T_{\pi(g)}G/H$ も全射となる．したがって，（一般に ϕ_p は p に関して連続にとることはできないが）陰関数定理が使える状況下では $\phi_p = \sigma(p,e)$ とおけば ϕ_p は指定した 1 個の局所座標近傍上では C^∞ となるように選ぶことができる．これにより $\coprod_{q\in G/H} H_q$ は局所的には $U_p \times H$ と C^∞-同相となる．

話を簡単にするために以下では H は**連結で，かつ局所弧状単連結**であるものとする．さらに $\tilde{H}$ を H の被覆群とする．つまり可換離散群 D が $\tilde{H}$ の中心の中にあり $\tilde{H}/D = H$ となっているものとする．これは H の単位元 e を始点とする連続曲線の（終点固定の）ホモトピー類として定義されている．

そこで集合 $\tilde{G} = \coprod_{p\in G/H} \tilde{H}_p$ を考える．$\tilde{H}_p$ は H_p において ϕ_p を始点とする連続曲線のホモトピー類である．これを**曖昧主束群**と呼ぶ．ここでは次のような射影 $\tilde{\pi}, \rho$ が自然に定義される：

$$\tilde{\pi} : \coprod_{p\in G/H} \tilde{H}_p \to G/H, \quad \rho = \amalg_p \rho_p : \coprod_{p\in G/H} \tilde{H}_p \to G = \coprod_{p\in G/H} H_p$$

$\rho : \coprod_{p\in G/H} \tilde{H}_p \to G$ は G の各点の上に $|D|$-個の点が乗っている D-被覆群に見えるものであるが，本当に被覆群になっているとも，点集合をなしているとも限らないので**曖昧被覆群**と呼ぶ．

局所連続自明化

ψ を使って $\coprod_{p\in G/H} \tilde{H}_p$ も局所的には前節の j_p（ただし o を H の単位元 e とする）を使って $U \times \tilde{H}$ と同一視される．この同一視写像を

---

1)　1.1.1 項の多様体のときの用語と似ているが，この場合の座標近傍というのは局所自明化を経由して直積空間に見えるという意味．

$$\tilde{\psi} : U_p \times \tilde{H} \to \tilde{\pi}^{-1} U_p = \coprod_{q \in U_p} \tilde{H}_q \tag{11.1}$$

と書いておく.

以下では H は**連結，局所弧状単連結な正則閉部分群**であるとする．$\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ を座標近傍による G/H の被覆とし，局所的に (11.1) 式で定義された写像を

$$\tilde{\psi}_\alpha : U_\alpha \times \tilde{H} \to \tilde{\pi}^{-1} U_\alpha = \coprod_{p \in U_\alpha} \tilde{H}_p \tag{11.2}$$

とする．ここで前項の $k_p(\alpha\beta)$（ただし o を H の単位元 e とする）を使って $U_{\alpha\beta}$ $(\neq \emptyset)$ に対して作用付曖昧束同型 $D_{\beta\alpha} : \tilde{\pi}^{-1}(U_{\alpha\beta}) \to \tilde{\pi}^{-1}(U_{\beta\alpha})$ を定義すれば

$$\Phi_{\beta\alpha} = \tilde{\psi}_\beta^{-1} D_{\alpha\beta} \tilde{\psi}_\alpha : U_{\alpha\beta} \times \tilde{H} \to U_{\beta\alpha} \times \tilde{H}$$

は連続となる．こちらのほうを貼り合わせの写像と思うわけだが，この貼り合わせには一般に齟齬が生じる．

このように一般にはファイバー束を定義しないのだが，H が正則な部分群の場合には局所座標系は考えられるので $\coprod_{p \in G/H} \tilde{H}_p$ を D を齟齬の群とする**曖昧主束群**と呼ぶ．またこれに局所群の構造を入れることができるので，$\coprod_{p \in G/H} \tilde{H}_p$ を $\coprod_{p \in G/H} H_p$ の被覆群のように見ているとき**曖昧被覆群**と呼ぶ．

> M の曖昧被覆空間 $\pi : \tilde{M} \to M$ では M の点 p の上にある $\pi^{-1}(p)$ の個々の点は局所的には意味があっても大域的には識別できず，個性を失うのである．量子論においても，たとえば個々の電子の振る舞いについての法則は書くことができず，たんに統計的規則としての法則が書かれるだけである．

曖昧被覆群の同値関係

連結位相群 G およびその連結閉部分群 H, K が与えられており，$K \subset H$（部分群）であるとする．この場合 H の被覆群 $\tilde{H}$ が K の被覆群 $\tilde{K}$ を使って $\tilde{H} = \coprod_{H/K} \tilde{K}_p$ のように与えられていると

$$\tilde{G} = \coprod_{p \in G/H} \tilde{H}_p = \coprod_{q \in G/K} \tilde{K}_q$$

とも書かれる．これは $\tilde{G}$ を G の曖昧被覆群と考えている場合には表示の仕方がいろいろあることを意味するので，曖昧被覆群として同じということの定義をはっきりさせておく必要がある．

定義 11.3　曖昧被覆群 $\tilde{G} = \coprod_{p \in G/H} \tilde{H}_p$ と $\hat{G} = \coprod_{q \in G/H} \tilde{H}_q$ がそれぞれ曖昧被覆群として $\tilde{G} = \coprod_{p \in G/L} \tilde{L}_p$, $\hat{G} = \coprod_{q \in G/L} \hat{L}_q$ のような表示を持ちこれらが曖昧主束群として同型のとき，曖昧被覆群 $\tilde{G}$ と $\hat{G}$ とは**同型**であると呼ぶ．

1 径数部分群

距離化群 G において $\mathbb{R}$ から G への連続写像 $g : \mathbb{R} \to G$ が $g(0) = e$, $\forall s, t \in \mathbb{R}$ で $g(s)g(t) = g(s+t)$ を満たすときその像 $g(\mathbb{R})$ を **1 径数部分群**と呼ぶ．

定義 11.4　$\mathbb{R}$ から $\tilde{G} = \coprod_{p \in G/H} \tilde{H}_p$ への局所的に見て連続な写像 φ が **1 径数部分群**であるとは $\tilde{\pi}\varphi : \mathbb{R} \to G$ が連続な準同型になっている場合をいう．

$\tilde{G}$ と G は局所的には同じと思ってよいのだから $\tilde{G}$ は**局所群と思ってよい**．次のことは明らかであろう．

定理 11.1　G の 1 径数部分群は指定された $\tilde{G}$ の単位元 $\tilde{e}$ を通る $\tilde{G}$ の 1 径数部分群に一意的にリフトされる．

また $\varphi(t)$ を $\tilde{G}$ の 1 径数部分群とすると，$\rho(\varphi(t))$ は G の 1 径数部分群であり，$\forall g \in G$ に対して $g\rho(\varphi(t))g^{-1}$ も G の 1 径数部分群である．定理 11.1 より一意的にリフトが存在するからこれを $\mathrm{Ad}(g)(\varphi(t))$ と書く．

随伴曖昧ベクトル束

$\tilde{H}$ が線形空間 V に線形に作用するものとし，その作用を ρ とする．各 $p \in G/H$ において形式的に $V_p = s(p)V$ という線形空間を考えれば $s(p)\tilde{H}s(p)^{-1}$ が作用する線形空間 V_p をつくることができる．$\coprod_{p \in G/H} V_p$ を考える．これを $\coprod_{p \in G/H} \tilde{H}_p$ に**付随する曖昧ベクトル束**と呼ぶ．随伴する曖昧ベクトル束ともいう．

C^∞-局所自明曖昧ベクトル束は点集合としては貼り合わないが，各点ごとに局所自明化を指定しておけば C^∞-切断という概念は矛盾なく定義される．台が小さいものを思い浮かべれば C^∞-切断がたくさんあることは明らかだろう．しかも C^∞-切断 σ と，$f \in C^\infty(G/H)$ の積（スカラー倍）は自然に定義される．しかし，C^∞-切断 σ, τ の和 $\sigma+\tau$ は（σ, τ の台が同じ座標近傍に入っているといったような）限定されたところ（局所的）にしか定義できない．C^∞-切断全体 $\boldsymbol{\Gamma}(\coprod_{p \in G/H} V_p)$ は線形空間にはなっていないのだが G/H の開集合を座標

近傍内にとり，その中に台を持つ C^∞-切断全体などは自然に線形空間になる．$\mathcal{O}=C^\infty(G/H)$ としておけば，大域的には $\mathcal{O}$-線形空間としての構造は持たないが，上のような意味では $\mathcal{O}$-線形性があるので，これだけで定義できる微分幾何的概念はそのまま曖昧ベクトル束上でも定義できる．また，直和，テンソル積なども自然に定義できる（したがって，齟齬を許した K-理論もあるはず）．

11.1.3 2 次の $*$-指数関数が生成する "群"

多変数の場合の 2 次の $*$-指数関数の計算は第 7 章でも少し扱ったが，生成する "群" がどのようなものかについては詳しくは考えていなかったのでここで変数が $u_1,\cdots,u_m,v_1,\cdots,v_m$ の場合についても考えておこう．

(7.18) 式でわかるように，斉次 2 次式全体は $*$-積による交換子積に関して $sp_{\mathbb{C}}(m)$ と同型のリー代数となっており，具体的には 7.2.2 項から読みとれるように $p(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})\to \mathrm{ad}(p(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}))$ がその同型対応を与えていた．

多変数の場合でも 2 次の $*$-指数関数どうしの積の公式は $\pm$ の不定性を含んだ形では (7.28) 式ですでに与えられている．しかも随伴表現をつくれば群 $Sp_{\mathbb{C}}(m)$ が得られることもわかっている．したがって，得られているものは $Sp_{\mathbb{C}}(m)$ の曖昧被覆群 $\widetilde{Sp_{\mathbb{C}}(m)}$ である．しかし $Sp_{\mathbb{C}}(m)$ は単連結群である．

$Sp_{\mathbb{C}}(m)$ の極大コンパクト可換部分群は m-次元トーラス T^m で，それは $\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{1}{\hbar}(t_1u_1v_1+\cdots+t_mu_mv_m)})$ として $Sp_{\mathbb{C}}(m)$ の中に入っている．

補題 11.1 上の表示には無駄があり実際は $T^m\cong\mathbb{R}^m/(2\pi\mathbb{Z})^m$ である．Ad をとりはらって裸の $e_*^{\frac{1}{\hbar}\sum_i t_iu_iv_i}$ が生成する群は可換群で T^m の 2 重被覆 $\tilde{T}^m$ でありそれは $\mathbb{R}^m/\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}=\{2\pi(k_1,\cdots,k_m)\in(2\pi\mathbb{Z})^m;\sum_i k_i=$ 偶数 $\}$ で与えられる．

これと，前節の曖昧被覆群のつくり方を合わせると次のことがわかるのである．

定理 11.2 $\widetilde{Sp_{\mathbb{C}}(m)}$ は $\coprod_{p\in Sp_{\mathbb{C}}(m)/T^m}\tilde{T}^m_p$ の形で与えられる $Sp_{\mathbb{C}}(m)$ の曖昧 2 重被覆群である．

一方，$Sp_{\mathbb{C}}(m)$ は回転群 $SO(m)=\{A\in M_{\mathbb{R}}(m);{}^tAA=I,\det A=1\}$ を

$$Sp_{\mathbb{C}}(m)\supset\left\{\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{bmatrix};A\in SO(m)\right\}$$

の形で含んでいる．$SO(m)$ は単連結ではなく，これの 2 重被覆群として単連結な群 $Spin(m)$ がある．すると，曖昧 2 重被覆群として

$$\widehat{Sp_{\mathbb{C}}(m)} = \coprod_{p \in Sp_{\mathbb{C}}(m)/SO(m)} Spin(m)_p$$

も考えられる．$\widetilde{Sp_{\mathbb{C}}(m)}$ と $\widehat{Sp_{\mathbb{C}}(m)}$ との間に自然な同型対応があるとは思えないのだが，どちらも $Sp_{\mathbb{C}}(m)$ の連結な曖昧 2 重被覆群なので，何らかの意味で（曖昧 2 重被覆群としての）同型対応があると期待できる．すると，$\widetilde{Sp_{\mathbb{C}}(m)}$ は何らかの意味で $Spin(m)$ を含んでいなければならないわけである．

$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^m$ として $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle = \sum_{i=1}^m a_i u_i$ などとすると，$[\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle, \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v} \rangle] = -\hbar i \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle$ である．つまり $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 1$ ならば $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle$ と $\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle$ は量子正準共役であり，$\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle^2 + \beta \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle^2 + 2\gamma \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle$ をこれまでの $\alpha u^2 + \beta v^2 + 2\gamma uv$ のように扱うことができる．したがって $\gamma^2 - \alpha\beta = 1$ ならばワイル順序表示では計算できないが正規順序表示では (7.16) 式より

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar}(\alpha \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle^2 + \beta \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle^2 + 2\gamma \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle)} = \sqrt{-1} e_\circ^{\frac{2i}{\hbar} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle \circ \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle}$$

である．$S^{m-1} = \{\boldsymbol{a} \in \mathbb{R}^m; \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \rangle = 1\}$ （単位球面）とし，$\forall \boldsymbol{a} \in S^{m-1}$ に対し $\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a}) = e_*^{\frac{\pi}{\hbar} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle}$, $\varepsilon_{00}^{-1}(\boldsymbol{a}) = e_*^{-\frac{\pi}{\hbar} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle}$ とする．$\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})$ は指数法則を優先させると

$$\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})^2 = (\varepsilon_{00}^{-1}(\boldsymbol{a}))^2 = -1, \quad \varepsilon_{00}(\boldsymbol{a}) * \varepsilon_{00}^{-1}(\boldsymbol{a}) = 1$$

であるが，正規順序表示で見ると $\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a}) = \varepsilon_{00}^{-1}(\boldsymbol{a})$ のようにも見え，結局 $\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})$ は $\pm$ の定まらぬ 2 価の元と考えたのである．また (7.32) 式より

$$e_*^{\frac{\pi}{\hbar} u_1 v_1} * (\sum_{i=1}^m b_i u_i) * e_*^{-\frac{\pi}{\hbar} u_1 v_1} = -b_1 u_1 + \sum_{i=2}^m b_i u_i$$

であるから，これと $*$-積が $Sp_{\mathbb{C}}(m)$ の変換で不変なことを利用するとベクトル $\boldsymbol{a}$ に関する折り返しが極地元の積で実行できる．つまり

$$\begin{aligned} e_*^{\frac{\pi}{\hbar} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle} * \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{u} \rangle * e_*^{-\frac{\pi}{\hbar} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle} &= \langle \boldsymbol{b} - 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle, \\ e_*^{\frac{\pi}{\hbar} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle} * \langle \boldsymbol{b}, \boldsymbol{v} \rangle * e_*^{-\frac{\pi}{\hbar} \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{u} \rangle \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle} &= \langle \boldsymbol{b} - 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{v} \rangle \end{aligned} \tag{11.3}$$

となって $\mathbb{R}^m$ での折り返しが全部含まれるから，次のこともわかる．

定理 11.3 $\{\mathrm{Ad}(\varepsilon_{00}^{\pm 1}(\boldsymbol{a}){*}\varepsilon_{00}^{\pm 1}(\boldsymbol{b})); \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^{m-1}\}$ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ で張る平面内での 2θ-回転（θ は $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ のなす角）を表すからこれらは回転群 $SO(m)$ を生成する．

これより $\{\varepsilon_{00}^{\pm 1}(\boldsymbol{a}){*}\varepsilon_{00}^{\pm 1}(\boldsymbol{b}); \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^{m-1}\}$ が何か $Spin(m)$ のようなものを生成していると思える．そこで $\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a}){*}\varepsilon_{00}(\boldsymbol{b})$ を正規順序表示で計算してみることにする．

11.1.4 正規順序表示での指数関数

まず (5.15) 式を用いた直接計算で次がわかる：

$$ge_{\circ}^{\frac{2i}{\hbar}\sum A_{kl}u_k\circ v_l} * g' e_{\circ}^{\frac{2i}{\hbar}\sum B_{st}u_s\circ v_t} = gg' e_{\circ}^{\frac{2i}{\hbar}\sum C_{ij}u_i\circ v_j}, \tag{11.4}$$

$$C = A + B - 2AB \qquad \text{(和と積は行列としてのもの)}.$$

$ge_{\circ}^{\frac{2i}{\hbar}\sum A_{kl}u_k\circ v_l}$ を行列と数の組 $(A; g)$ と書いてしまうと (11.4) 式は

$$(A;g){*}(B;g') = (A+B-2AB; gg'), \quad (A;g), (B;g') \in M_{\mathbb{C}}(m) \times \mathbb{C} \tag{11.5}$$

という積を定義したもので，$(0;1)$ が積 $*$ に関する単位元である．成分ごとに独立した積が定義されているだけだから，$M_{\mathbb{C}}(m)$ のほうに $A{*}B = A + B - 2AB$ という積を定義しておけばそれと $\mathbb{C}$ との直積である．

原点移動の写像 $\psi : M_{\mathbb{C}}(m) \to M_{\mathbb{C}}(m)$ を $\psi(A) = I - 2A$ と定義しておけば $\psi(A)\psi(B) = \psi(A{*}B)$ であるから，普通の行列の計算を少し別の角度から見ているだけである．結合律 $A * (B * C) = (A * B) * C$ などはすぐ確かめられ，得られるのが $GL_{\mathbb{C}}(m)$ であることもわかる．これを使うと次がわかる．

補題 11.2 $C_*(u,v) = \sum C_{kl}u_k{*}v_l$ とすると $*$-指数関数 $e_*^{tC_*(u,v)}$ は正規順序表示では $e_*^{tC_*(u,v)} = e_{\circ}^{\frac{i}{\hbar}(I-e^{itC})_*(u,v)}$ で与えられるから，

$$2u_k v_k = u_k{*}v_k + v_k{*}u_l = 2u_k{*}v_k + \hbar i$$

を使うと 2 次の指数関数の正規順序表示として次の公式が得られる（$t=0$ で 1 となるようにしているので $\pm$ の不定性は出ない）：

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}\sum C_{kl}u_k v_l} = e^{\frac{it}{2}\mathrm{Tr}C} e_{\circ}^{\frac{i}{\hbar}\sum (I-e^{itC})_{kl}u_k\circ v_l}. \tag{11.6}$$

証明　最初の等式は (11.5) 式を使うと

$$e_\circ^{\frac{i}{\hbar}(I-e^{isC})_*(u,v)} * e_\circ^{\frac{i}{\hbar}(I-e^{itC})_*(u,v)} = e_\circ^{\frac{i}{\hbar}(I-e^{i(s+t)C})_*(u,v)}$$

が容易に示せるから，$t=0$ で微分の値を見ればよい．（証明終わり）

注意 11.2　$\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a}) = \sqrt{-1}e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\circ\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{v}\rangle}$ だから，上の書き方では $\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})$ は $({}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a};\sqrt{-1})$ と書かれる．ただし $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_m)$(1 行 m 列の行列) で ${}^t\boldsymbol{a}$ はその転置行列である．つまり $C={}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ である．

$\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{a}=1$ のときには $({}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a})^n={}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ であることに注意すれば $e^{s{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}}=I+(e^s-1){}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ がわかるから，正規順序表示では不定性は消えて次のようになる：

$$e_*^{\frac{t}{\hbar}\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{v}\rangle} = e^{\frac{it}{2}} e_\circ^{\frac{i}{\hbar}(1-e^{it})\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{u}\rangle\langle \boldsymbol{a},\boldsymbol{v}\rangle}.$$

しかしこれは $t=0$ で 1 となるようにしているからである．

注意 11.3　$\frac{i}{\hbar}(u_2{*}v_1-u_1{*}v_2)$ を扱うには $C=J=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}$ として $C_{ij}u_i{*}v_j$ を考える．Tr $C=0$ であるから，

$$e_*^{\frac{ti}{\hbar}(u_2*v_1-u_1*v_2)} = e_\circ^{\frac{i}{\hbar}\sum(I-e^{-tJ})_{kl}u_k\circ v_l}$$

であり，$e^{-\pi J}=-I$, $e^{-2\pi J}=I$ だから

$$e_*^{\frac{\pi i}{\hbar}(u_2*v_1-u_1*v_2)} = e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}(u_1*v_1+u_2*v_2)}, \quad e_*^{\frac{2\pi i}{\hbar}(u_2*v_1-u_1*v_2)} = 1$$

となる．一方，$e_\circ^{\frac{2i}{\hbar}(u_1*v_1+u_2*v_2)} = \pm\varepsilon_{00}(1){*}\varepsilon_{00}(2)$ は容易にわかるから

$$e_*^{\frac{\pi i}{\hbar}(u_2*v_1-u_1*v_2)} = \pm\varepsilon_{00}(1){*}\varepsilon_{00}(2) \tag{11.7}$$

である．さらに随伴表現を見ると

$$\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{\pi i}{2\hbar}(u_2*v_1-u_1*v_2)})f(u_1,u_2,v_1,v_2) = f(-u_2,u_1,-v_2,v_1)$$

であることがわかる．したがって，$\mathrm{Ad}(e_*^{\frac{\pi i}{2\hbar}(u_2*v_1-u_1*v_2)})\varepsilon_{00}(1)=\varepsilon_{00}(2)$，つまり

$$e_*^{\frac{\pi i}{2\hbar}(u_2*v_1-u_1*v_2)}{*}\varepsilon_{00}(1){*}e_*^{-\frac{\pi i}{2\hbar}(u_2*v_1-u_1*v_2)} = \varepsilon_{00}(2)$$

を得る．これに球撞き補題 7.2 を使うと

$$e_*^{\frac{\pi i}{\hbar}(u_2*v_1-u_1*v_2)}{*}\varepsilon_{00}(1) = \varepsilon_{00}(2) \tag{11.8}$$

がわかるから，(11.7) 式とあわせて

$$\pm\varepsilon_{00}(1){*}\varepsilon_{00}(2){*}\varepsilon_{00}(1) = \varepsilon_{00}(2) \tag{11.9}$$

が得られる．$\varepsilon_{00}(1)^2=-1$ に注意し両辺の右から $\varepsilon_{00}(1)$ をかけると，$\mp\varepsilon_{00}(1)*\varepsilon_{00}(2) = \varepsilon_{00}(2)*\varepsilon_{00}(1)$ となる．$\varepsilon_{00}(1)$ と $\varepsilon_{00}(1)$ は可換と思っていたからこれは一見奇妙に見えるが，第 7 章でも述べたように $\varepsilon_{00}(i)$ は 2 価の元と思わねばならないことからくるものである．

上の略記号を用いると (11.4) 式より

$$\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})*\varepsilon_{00}(\boldsymbol{b}) = ({}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} + {}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} - 2{}^t\boldsymbol{a}(\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b})\boldsymbol{b}; \sqrt{-1}\sqrt{-1}) \quad (\boldsymbol{a}{}^t\boldsymbol{b} = \langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}\rangle \text{ に注意})$$

となる．${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ は階数 1 の対称行列であり，一般の階数 1 の行列は ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$ のように表される．このとき $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = (\pm i)(\pm i)$ を複合同順，複合独立のどちらで計算すべきか考えるべきだが，$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ が独立に動けることから，複合独立で計算し $\sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{1} = \pm 1$ とする．指数法則を使う限り $\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})^2 = -1$ としなければならないのであるが，$\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})^2$ は同じものを 2 つかけていると見るべきだからこの場合は複合同順で計算して $(\pm i)(\pm i) = -1$ となる．

ΨDO-積公式 (5.15) を使って計算している限り各成分の計算は他の成分に影響されることはないから最初の成分のところだけを見ると次がわかる．

補題 11.3　$\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}\rangle = 1$ ならば ${}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}*{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} = 0$ である．$\{{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}; \boldsymbol{a} \in S^{m-1}\}$ は直交群 $O(m)$ を，また $\{{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}*{}^t\boldsymbol{b}\boldsymbol{b}; \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^{m-1}\}$ は回転群 $SO(m)$ を生成する．

証明　$m \times m$-行列 A について容易に $I - 2A \in O(m) \Leftrightarrow A + {}^tA = 2A{}^tA$ がわかる．$A = {}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$ は条件を満たすから $I - 2{}^t\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} \in O(m)$ であり，行列式は -1 である．また A, B が条件を満たせば $(I-2A)(I-2B) \in O(m)$ であるから，$A + B - 2AB$ も条件を満たす．　（証明終わり）

このように，$\{\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})*\varepsilon_{00}(\boldsymbol{b}), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^{m-1}\}$ が生成している "群" の性格は曖昧なものであり，次のように述べるのが最もよいと思われる．

命題 11.1　$\{\varepsilon_{00}(\boldsymbol{a})*\varepsilon_{00}(\boldsymbol{b}), \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^{m-1}\}$ は $SO(m)$ の曖昧 2 重被覆群 $\widetilde{SO(m)} = SO(m) \times \{\kappa\}$ を生成する．κ は $\{\pm 1\}$ を動く不定元である．

$\widetilde{SO(m)} = \mathrm{Ad}^{-1}(SO(m))$ は（貼り合わせの齟齬を許すので）点集合とは考えないものであるが，齟齬を矯正すれば点集合と理解できるものが 2 種類共存している．1 つは直積群 $SO(m) \times \mathbb{Z}_2$ であり，もう 1 つは $Spin(m)$ である．つまり，$\widetilde{SO(m)}$ では局所自明化の集団は貼り合わせに齟齬をきたすのであるが，その原因は 2

種類の群構造を同時に扱ったためなのである．したがって，$\widetilde{SO(m)}$ をどちらの点描像で見てもかまわないが区別は必要である．

群 $Spin(m)$ と随伴表現

$\widetilde{SO(m)} = \mathrm{Ad}^{-1}(SO(m))$ を直積群 $SO(m) \times \mathbb{Z}_2$ と素直に見ることはできるが，$Spin(m)$ と見ることは素直にはできないので，もう少し詳しく見ておこう．

群 $Spin(m)$ は普通クリフォード代数を使って定義される．$e_1, \cdots, e_m$ を $E_m = \mathbb{R}^m$ の標準の正規直交基底とし $e_i \hat{*} e_j + e_j \hat{*} e_i = -2\delta_{ij}$ という関係式で定義されたクリフォード代数を $\mathcal{C}_Q(E_m)$ とする．

$e_1, \cdots, e_m$ で張られる複素線形空間を V_m とすると $\mathrm{ad}(\sum a_{ij} e_i e_j)$ は V_m 上の線形変換であり，基底 $e_1, \cdots, e_m$ に関する行列表示は歪対称行列である．

$\forall \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^{m-1}$（単位球面）に対し $e(\boldsymbol{a}) = \sum_i a_i e_i$, $e(\boldsymbol{b}) = \sum_i b_i e_i$ とすると

$$e(\boldsymbol{a}) \hat{*} e(\boldsymbol{b}) = -\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle + \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i) e_i \hat{*} e_j$$

である．ここでは $\pm$ の不定性は起こらない．

$$e_1 \hat{*} (\sum_{i=1}^{m} b_i e_i) \hat{*} e_1^{-1} = -b_1 e_1 + \sum_{i=2}^{m} b_i e_i$$

であるから，これを利用するとベクトル $\boldsymbol{a}$ に関する折り返しがクリフォードの積で実行できる．つまり

$$e(\boldsymbol{a}) \hat{*} \boldsymbol{b} \hat{*} e(\boldsymbol{a})^{-1} = \boldsymbol{b} - 2\langle \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \rangle \boldsymbol{a} \tag{11.10}$$

となって $\mathbb{R}^m$ での折り返しが全部含まれる．したがって，

定理 11.4 $\{\mathrm{Ad}(e(\boldsymbol{a}) * e(\boldsymbol{b})); \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^{m-1}\}$ は回転群 $SO(m)$ を生成する．

$\{e(\boldsymbol{a}); \boldsymbol{a} \in S^{m-1}\}$, $\{e(\boldsymbol{a}) \hat{*} e(\boldsymbol{b}); \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in S^{m-1}\}$ が $\hat{*}$-積に関して生成する群をそれぞれ $Pin(m)$, $Spin(m)$ とする．

そこで，$\forall k$ に対して

$$e(\boldsymbol{a}_1) \hat{*} e(\boldsymbol{a}_2) \hat{*} \cdots \hat{*} e(\boldsymbol{a}_k) \leftrightarrow \varepsilon_{00}(\boldsymbol{a}_1) * \varepsilon_{00}(\boldsymbol{a}_2) * \cdots * \varepsilon_{00}(\boldsymbol{a}_k)$$

という対応を考えると，これは Ad( ) をとってみれば恒等対応になるのだから $\pm$ を無視する 2 対 2 の写像としてならば同型対応を与えるといってもよいであ

ろう．左辺の $\hat{*}$-積の $\pm$ をそのまま使って κ の不定性を矯正すれば同型対応を与えるものである．

この辺はもっと組織的に議論すべきだが，いまのところそこまでできていない．

わからないこと

このように見てくると，$Spin(m)$ と $\widetilde{SO(m)}$ の間にはもっと深い関係があることが伺える．しかしいまのところ群 $Spin(m)$ を $*$-積の計算の中から自然に導き出すことはできていない．何かちょっとしたトリックでここは超えられそうな気がするだろうが，これは奥の深い問題である．

11.2　齟齬の概念

3.3 節で定義した曖昧ベクトル束という概念，7.2 節に出てきた曖昧被覆群の概念などはいずれも点集合として理解するのが苦しい対象であるが，このようなものがたんに現れるだけでなく，数学の中で積極的役割を演ずるのである．まずそれから述べよう．

齟齬というと都合の悪いものと捉える人が多いだろうが，よく考えてみると都合が良いとか悪いとかはきわめて人間的なものである．

11.2.1　局所接触ワイル代数束貼り合わせの齟齬

前章で与えたワイル多様体 $\mathcal{O} = (C^\infty(M)[[\mu]]; *)$ で考え，記号や仮定はそのままとする．各 U_α 上で 7.4.3 項のように変数 $\tilde{\tau}^\alpha$ を添加して

$$\{\mu, \tilde{\tau}^\alpha, x_1^\alpha, \cdots, x_r^\alpha, y_1^\alpha, \cdots, y_r^\alpha\}$$

で生成される接触ワイル代数 $C^\infty(U_\alpha \times \mathbb{R})[[\mu]]$ を構成する．これは μ-制御代数である．7.4.3 項では $\hbar$ を形式変数にしたくなかったので $\mathcal{E}_2(\mathbb{R}^{2n})$ を使っているが，ここでは μ は形式変数なのでたんに関係式 (7.49) を設定して代数を拡張すればよい（ただし $\tilde{\hbar}, \tilde{\tau}, u_i, v_i$ を $\mu, \tilde{\tau}^\alpha, x_i^\alpha, y_i^\alpha$ に置き換える）．これを**局所接触ワイル代数**と呼ぶ．$(C^\infty(U_\alpha)[[\mu]]; *)$ は局所接触ワイル代数 $(C^\infty(U_\alpha \times \mathbb{R})[[\mu]]; *)$ の中に，「μ と可換な元の全体」として入っている．

しかしこのように局所的に構成された局所接触ワイル代数は M 上で貼り合って 1 つの代数をつくっているのだろうか？

記号を簡単にするために以下では $(C^\infty(U\times\mathbb{R})[[\mu]];*)$ を $\mathcal{C}(U)$ と書くことにする．U のところには U_α, $U_\alpha\cap U_\beta$ とか $U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma$ が入る．

μ-制御代数なので $\forall a\in\mathcal{C}(U)$ に対して $\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)$ は $\mathcal{C}(U)$ の微分である．この場合 μ^{-1} が使われているが，これは形式的に μ^{-1} があると思って

$$[\mu^{-1}*a,b]=-\Big(\frac{1}{\mu}[\mu,b]\frac{1}{\mu}\Big)*a+\frac{1}{\mu}[a,b]\quad (\tfrac{1}{\mu}\text{ はたんに }\mu\text{ を切り落とす意味})$$

として計算するというだけの意味であるから μ が形式的変数であってもかまわない（4.3.2 項参照）．一般には $\exp\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)$ のようなものは定義できないが，μ が形式変数なので

$$a=c+\sum_k\mu^k f_k,\quad c\in\mathbb{R},\ f_k\in C^\infty(U)$$

の場合は $\exp\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)$ は $\mathcal{C}(U)$ 上の自己同型となり，さらにこの自己同型が部分空間 $\mathcal{C}_{\mathbb{R}}(U)$ を保つことを要求すると偶数冪しかなくなり $a=c+\sum_k\mu^{2k}f_{2k}$ となることが知られている．

局所接触ワイル代数の曖昧ベクトル束

> 齟齬という言葉は裏に「そんなものはないほうがよい」という意味が含まれていると思うかもしれないが，ここでは齟齬が代数を決める不変量になっている．

詳しくは [37] を参照してもらいたいが，実は次のことが成立する．

命題 11.2　$U_\alpha\cap U_\beta\neq\emptyset$ とすると，$*$-同型写像 $\Phi_{\alpha\beta}:C^\infty(U_\alpha\cap U_\beta)[[\mu]]\to C^\infty(U_\beta\cap U_\alpha)[[\mu]]$ は同型写像 $\tilde\Phi_{\alpha\beta}:\mathcal{C}(U_\alpha\cap U_\beta)\to\mathcal{C}(U_\beta\cap U_\alpha)$ に拡張（リフト）される．

$U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma\neq\emptyset$ のとき $\tilde\Phi_{\alpha\beta\gamma}=\tilde\Phi_{\alpha\beta}\tilde\Phi_{\beta\gamma}\tilde\Phi_{\gamma\alpha}$ とおく．一般にはこれは恒等写像とはならず局所接触ワイル代数の貼り合わせに齟齬が生ずる．

(10.3) 式より $\tilde\Phi_{\alpha\beta\gamma}$ は $C^\infty(U_\alpha\cap U_\beta\cap U_\gamma)[[\mu]]$ 上では恒等写像となる．恒等写像のリフトとしてどのようなものがとれるかを調べることにより，実は次のことがわかる．

命題 11.3　齟齬の部分は次の式で与えられる：

$$\tilde{\Phi}_{\alpha\beta\gamma} = e^{\mathrm{ad}(\mu^{-1}c_{\alpha\gamma\beta}(\mu))}, \quad c_{\alpha\gamma\beta}(\mu) = \sum_{k\geq 0} c^{(k)}_{\alpha\gamma\beta}\mu^{2k}, \quad c^{(k)}_{\alpha\gamma\beta} \in \mathbb{C}.$$

詳しくは [7], [37], [45] などを参照してもらいたいが $\{c_{\alpha\gamma\beta}(\mu)\}$ はチェックの 2-余輪体 (2-cocycle) と呼ばれるものになり，これが決める $H^2(M)[[\mu^2]]$ の元が $\mathcal{O}$ の不変量になっているのである．この不変量は [37] では**ポアンカレ－カルタン不変量**と呼ばれている．

局所表現空間の齟齬束

> 齟齬束は局所的表現空間を貼り合わせて大域的表現空間をつくろうとした場合にも現れる．

前章のワイル多様体 $(C^\infty(M)[[\mu]];*)$ においては各 $(C^\infty(U)[[\mu]];*)$ では局所ダルブー系を選び $\mu = \hbar i$ を形式的変数として扱えば局所的には作用素表現を付けることができた．

このようにある局所化可能な代数が与えられ，その局所化された代数に作用素表現がそれぞれ与えられたとする．このときこれをもとにしてもとの代数の作用素表現がつくられるであろうか？　これは局所的に定義された代数の作用素表現をつくり，その局所的表現空間を大域的に貼り合わせる問題である．

ところが一般には局所的につくった表現空間は大域的に貼り合わず，齟齬を表す 2 次のチェック・コサイクル ω が $e^{\frac{2\pi i}{\hbar}\omega}$ の形で現れる．したがって貼り合うためには $\frac{1}{\hbar}\omega \in H^2(M,\mathbb{Z})$ が 0 クラスを指定するといった位相的条件が課せられるのである．このことは，局所的表現をつくるために「真空」を使っていたことを思い出せば，大域的真空が定義できるための条件と理解してもよい．

> 局所的に定義された代数は貼り合わせられても，表現空間の貼り合わせは一般には齟齬をきたすのである．

ワイル多様体の場合には M にラグランジェ部分束があるかという問題として定式化されるが，詳しい話は専門的になるので省略する．

しかし，μ を形式変数としたままの理論は物理理論とはみなされないのだから，$\mu = \hbar i$ を形式的変数としたくなければ $\mu * \varpi = \varpi$ となる真空を用意し $e_*^{s\tilde{\tau}^\alpha}$

を $\mathrm{ad}(\mu^{-1})$ の（固有値 s の）固有ベクトルとして採用して，ここで話ができるように扱う元を制限する必要がある．

今日の場の理論ではこのような齟齬はないほうがよいと考えられているから，位相的条件を付けて齟齬がいつ消えるかに注意が集中してしまっているが，上で見てきたように齟齬が現れるのはむしろ一般的である．とするとむしろ齟齬と共存できる理論のほうに注意を向けるべきではないのだろうか？　簡単な位相的条件で齟齬が消えることが見える場合はそれでよいとしても，これが消えなくても量子論の本質は何も影響されないのである．

11.2.2　ワイル – クリフォード代数の局所表現空間

定理 10.5 で見たように $(\mathcal{F}_N^*[T_N^*][[\mu]];*)$ は局所的には $(C^\infty(U)[[\mu]]\otimes C_Q^n;*)$ と同型であり，ワイル – クリフォード代数と呼べるようなものが N の上に構成できるのだが，局所的に構成してそれを貼り合わせて代数をつくっただけである．局所生成元の変換則は得られているのだが，これでいったい何が貼り合わされているのだろうか？

代数の元が貼り合っていると言ってしまえばそれまでだが，これは結局この代数の作用素表現をつくりその表現空間を見ようとすることなのである．

クリフォード代数の真空表現

基底 $e^1,\cdots,e^m,e_1^*,\cdots,e_m^*$ に基本関係式

$$e^i*e^j+e^j*e^i=0=e_i^**e_j^*+e_j^**e_i^*,\quad e^i*e_j^*+e_j^**e^i=\mu^2\delta_{ij}$$

を入れて定義されるクリフォード代数を $\mathfrak{C}_{2m}$ とする．$e^1,\cdots,e^m$ だけ，または $e_1^*,\cdots,e_m^*$ だけで生成されるのはグラスマン代数だから，これをそれぞれ $\Lambda(m)$，$\Lambda^*(m)$ と書き，そこでの積も $*$ の代わりに $\wedge$ で書く．

ここで "真空" ϖ_V を次のように定義する：

$$\varpi_V=\Big(\frac{1}{2\mu^2}\Big)^m(e_1^*\wedge\cdots\wedge e_m^*)*(e^m\wedge\cdots\wedge e^1).$$

これは $1\le\forall i\le m$ に対して $e_i^**\varpi_V=0=\varpi_V*e^i$ となり，かつ $\varpi_V*\varpi_V=\varpi_V$ となる元である．すると $\mathfrak{C}_{2m}*\varpi_V=\Lambda(m)*\varpi_V$ となる．$\Lambda(m)*\varpi_V$ の元は**複素スピノル**と呼ばれる．

$\Lambda(m)$ は超可換な代数だったから $\Lambda(m) * \varpi_V$ をワイル代数 $(\Sigma^{(0)}(T_U^*); *)$ のときの $C^\infty(U) * \varpi_{00}$ のように思うのである．すると e^i は積作用素 $\omega * \varpi_V \to (e^i \wedge \omega) * \varpi_V$ に，e_i^* は $e_i^* * \omega * \varpi_V = [e_i^*, \omega] * \varpi_V$ だから微分 $\mu(\overrightarrow{\partial}_i \omega) * \varpi_V$ として書かれる．一般には $\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}^{\varepsilon'}$ も多重添字法で読むことにして

$$\sum a_{\varepsilon,\varepsilon'} \boldsymbol{e}^\varepsilon * \boldsymbol{e}^{*\varepsilon} * \omega * \varpi_V = \sum a_{\varepsilon,\varepsilon'} \mu^{|\varepsilon'|} (\boldsymbol{e}^\varepsilon \wedge (\overrightarrow{\boldsymbol{\partial}}^{\varepsilon'} \omega)) * \varpi_V$$

のように書かれる．つまり，クリフォード代数はグラスマン代数 $\Lambda(m)$ の線形変換として表現されるのである．次元を調べれば $\mathfrak{C}_{2m} \cong L(\Lambda(m))$（線形写像全体）であることは容易に理解されよう．

11.2.3 局所スピノル場の齟齬

$M = T_N^*$ は自然に多様体だから $C_Q^{2n}(T_N^*)$ が考えられる．局所座標系としては N の座標近傍 U を考えその上の座標関数を $x^1, \cdots, x^m$ とすると T_U^* の座標系としては $(x^1, \cdots, x^m, \xi_1, \cdots, \xi_m)$ がとられ，$\mathcal{F}^*(M) = \mathcal{F}^*(T_N^*)$ の局所生成系としては T^*U 上で

$$x^1, \cdots, x^m, \xi_1, \cdots, \xi_m, dx^1, \cdots, dx^m, d\xi_1, \cdots, d\xi_m$$

がとられる．g^{ij} の逆行列を g_{ij} とする．クリフォードの積 $*$ は局所座標系を使って書くと，$dx^i \circ dx^j = \frac{1}{2}(dx^i * dx^j + dx^j * dx^i)$ などとして，

$$dx^i \circ dx^j = \mu^2 g^{ij}, \quad d\xi_i \circ d\xi_j = \mu^2 g_{ij}, \quad d\xi_i \circ dx^j = 0$$

である．ただし $g^{ij} = \langle dx^i, dx^j \rangle$, $g_{ij} = \langle d\xi_i, d\xi_j \rangle$ である．

係数環を複素数値の関数環に拡大して局所的に

$$f^i(x) = dx^i + \sqrt{-1} g^{ik}(x) d\xi_k, f_i^*(x) = g_{ik}(x) dx^k - \sqrt{-1} d\xi_i \text{（アインシュタイン記法）}$$

とおくと，次のような前項で扱ったのと同じ関係式が成立する：

$$f^i * f^j + f^j * f^i = 0 = f_i^* * f_j^* + f_j^* * f_i^*, \quad f^i * f_j^* + f_j^* * f_i = \mu^2 * \delta_j^i.$$

$f^1, \cdots, f^n$（および $f_1^*, \cdots, f_n^*$）は積 $*$ に関してそれぞれ $\mathcal{F}_U^*$ と同型の外微分環を生成するが，記号を区別して $f^1, \cdots, f^n$（および $f_1^*, \cdots, f_n^*$）が生成する

ものをそれぞれ $\mathcal{S}_n(U)$（および $\mathcal{S}_n^*(U)$）と書く．$\mathcal{S}_n(U)$ の元を**局所スピノール場**と呼ぶ．局所的真空 ϖ_U を次の式が成立するように選ぶ：

$$\xi_i * \varpi_U = 0, \quad \sqrt{-1}d\xi_i * \varpi_U = g_{ij}dx^j * \varpi_U.$$

$\mathcal{S}_n(U) * \varpi_U$ を表現空間として設定し，そこに働く作用素として代数を捉えようとしているのだが

$$(dx^j + \sqrt{-1}g^{jk}(x)d\xi_k) * \varpi_U = 2dx^j * \varpi_N, \quad (dx^j - \sqrt{-1}g^{jk}(x)d\xi_k) * \varpi_U = 0$$

が成立し，下のような対応

$$f^i * : \mathcal{S}_n(U) * \varpi_U \to \mathcal{S}_n(U) * \varpi_U, \quad \omega \to f^i * \omega * \varpi_N = (f^i \wedge \omega) * \varpi_N,$$
$$f_i^* * : \mathcal{S}_n(U) * \varpi_U \to \mathcal{S}_n^*(U) * \varpi_U, \quad \omega \to f_i^* * \omega * \varpi_U = \mu^2(\overrightarrow{\partial_i}\omega) * \varpi_U$$

によって行列表現が得られている．したがって $dx^i = \frac{1}{2}(f^i + g^{ij}f_j^*)$ によって dx^i の行列表示が得られる．つまり，$\forall\omega \in \mathcal{S}_n(U)$ に対して

$$\omega * \varpi_U \to dx^i * \omega * \varpi_U = \frac{1}{2}(f^i + g^{ij}f_j^*) * \omega * \varpi_U = \frac{1}{2}(dx^i \wedge \omega + g^{ij}\overrightarrow{\partial_j}\omega) * \varpi_U$$

と計算する．ワイル代数と違うところは $(f^i * f_i^* + f_i^* * f^i) * \omega * \varpi_U = \mu^2 \omega * \varpi_U$ となることである．しかし実は，局所的真空 ϖ_U は座標変換には耐えないのである．つまり局所的に定義された $L\mathcal{S}_n^*(U) = \{\omega; \omega * \varpi_U = 0\}$ が $C_Q^{2m}(T_N^*)$ の部分束を構成しない（座標変換で互いに貼り合わせられない）のである．

つまり，一般には局所座標変換を行なうと $\mathcal{S}_n(U)$ の元と $\mathcal{S}_n^*(U)$ の元とが混じり合って区別できなくなるのである．N がちょっとした条件[2]を満たすと $L\mathcal{S}_n^*(U)$ を N 上で貼り付けて考えられるようになる．このような場合 N は「スピン $\mathbb{C}$ 構造を持つ」という．出来上がった空間を $L\mathcal{S}_n^*(N)$ のように書くことにする．$C_Q^{2n}(T_N^*)/L\mathcal{S}_n^*(N)$ は線形空間としては $\mathcal{S}_n(N)$ と自然に同一視され，これは外微分環 $\mathcal{F}_N^*$ を複素化したものと同型である．

N がスピン $\mathbb{C}$ 構造を持っているとき真空 ϖ_N を

$$\xi_i * \varpi_N = 0, \quad \sqrt{-1}d\xi_i * \varpi_N = g_{ij}dx^j * \varpi_N$$

のように選ぶと $C_Q^{2n}(T_N^*) * \varpi_N = \mathcal{S}_n(N) * \varpi_N$ のようになる．

---

2) コホモロジーの自然な写像 $H^2(N;\mathbb{Z}) \to H^2(N;\mathbb{Z}_2)$ が全射なら十分．

第12章　汎リー群

法則と個々の現象

法則は微分方程式で与えられる．個々の現象はその方程式を解かなくてはならない．ところが，解の存在証明は易しくないのが普通である．法則を書く側に立ってみれば，解の存在証明の難しさはうさん臭いものであろう．ならば，解の存在が初めから組み込まれているようなところで理論を書けばよいはずである．こういうものを多様体に代わる新しい必要悪として掲げようとしているのである．

一般に齟齬を許したベクトル束のようなものを数学の対象とした場合には，こういうところに作用する "群" の概念も，曖昧被覆群のようなものまで含むものに広げなければならない．

この章では無限小の元という述べ方が許される群の概念を設定するために最低限必要で，しかも取り扱いが容易な**汎リー群** (generalized Lie groups) というものを定義する．

局所群というのは位相群の単位元の近傍が持っている性質を抽象化して得られる概念である．局所群が集合に全単射として作用するならばその局所群は群を生成する．しかし曖昧ベクトル束のような齟齬を持った対象に作用すると生成してくるものは曖昧被覆群である．曖昧被覆群では「点」というものが大域的には安定した意味を持たないのだが，こういうところから大域的な結論を引き出そうとすれば，その記述は（齟齬の群上で何らかの平均を考えるといった）

統計的操作を含んだものにならざるを得ない．

このことを考慮するならば，距離化群の曖昧被覆群の上で群の演算を使って微分とか積分にあたるものを考えるべきなのであるが，曖昧被覆群の概念がまだ完全には定着していないので，以下ではたんに距離化群で考えることにする．

（しかし，曖昧被覆群の全貌がはっきりしてくれば以下の事柄を曖昧被覆群の上に焼き直すのは難しくないと思われる．）

12.1 群論的微分積分と経路積分

線形構造を使うと，微積分は簡単に定義できる．ならば，群構造（積の構造）でも同様のものが考えられよう．

距離化群（またはその曖昧被覆群）の 1 径数部分群では指数法則 $g(t)g(s) = g(t+s)$ がわかる．これより容易に $(g(t+\frac{s}{n})g(t)^{-1})^n = g(s)$ である．このことを，群の演算を積の代わりに和を使って書くと $\forall n$ で

$$\frac{1}{\frac{1}{n}}\big(g(t+\frac{s}{n}) - g(t)\big) = g(s) \tag{12.1}$$

が成立するということだから，$n \to \infty$ の極限でも当然成立している．これは，空間内の直線が持っている性質である．つまり，**1 径数部分群とは直線の性質を積を使って表現したものである．**

$h(t)$ が 1 径数部分群ならば $\forall g \in G$ に対して $gh(t)g^{-1}$ も 1 径数部分群である．これを $\mathrm{Ad}(g)h(t)$ のように書く．

12.1.1 指数型の群

指数型の群[1]とは（直線にあたる）1 径数部分群をたくさん持っている距離化群で，次の公準を満たす，距離化群とフレシェ空間の組 $(G, \mathfrak{g})$ をいう：

(E.1) **指数写像**と呼ばれる連続写像 $\exp: \mathfrak{g} \to G$ があって，各 $u \in \mathfrak{g}$ に対し $\exp tu$ は 1 径数部分群で，$\forall a \in \mathbb{R}$ で $\exp(at)u = \exp t(au)$．

(E.2) $\exp tu = \exp tv$ が $\forall t \in \mathbb{R}$ で成立するならば $u = v$．

(E.3) $\mathfrak{g}$ 内の点列 $\{u_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が $u \in \mathfrak{g}$ に収束することと 1 径数部分群の列 $\{\exp tu_n\}_{n=1,2,\cdots}$ が $\exp tu$ に $t = 0$ のあるコンパクト近傍上で一様収束す

1) ここの定義は [22] のものから少し変えてある．

ることが同値.

(E.4) Ad: $G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ なる連続写像があって，$\mathrm{Ad}(g)(\exp tu) = \exp t\mathrm{Ad}(g)u$.

(E.5) $\forall u, v$ について，$\mathrm{Ad}(\exp tu)v$ は t に関して連続微分可能で，$[u,v] = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp tu)v$ と定義すると $[\,,\,] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が連続.

指数型の群 G では $\exp tu, u \in \mathfrak{g}$ の形の 1 径数部分群がたくさんあるわけだが，このように書かれない G の 1 径数部分群があってもかまわない．また上の定義だけからは $\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ が線形写像かどうかわからないが，$\exp tu \exp su \exp(-tu) = \exp su$，および

$$h \exp tu \exp sv \exp(-tu)h^{-1} = \exp t\mathrm{Ad}(h)u \exp s\mathrm{Ad}(h)v \exp(-t\mathrm{Ad}(h)u)$$

が成立する．これより指数型の群 $(G, \mathfrak{g})$ では次が成立する：

$$\mathrm{Ad}(\exp tu)u = u, \quad \mathrm{Ad}(h \exp tu)v = \mathrm{Ad}(\exp t\mathrm{Ad}(h)u)\mathrm{Ad}(h)v. \tag{12.2}$$

このような概念を用意しておいて，概念構成のときの使い勝手の良さを目安にして，後で述べる定理 12.3，12.4，12.5 が成立するようななるべく広い群的概念を定義したいのである．

12.1.2 群論的微分

指数型の群 G を考える．$\mathbb{R}$ から G への連続写像 $c : \mathbb{R} \to G$ が $t \in \mathbb{R}$ で**微分可能**であるとは

$$\lim_{n\to\infty}\left(c(t+\frac{s}{n})c(t)^{-1}\right)^n \tag{12.3}$$

がある 1 径数部分群 $\exp su(t), u(t) \in \mathfrak{g}$ に $t=0$ のあるコンパクト近傍上で一様収束する場合をいう．$u(t) \in \mathfrak{g}$ を $c : \mathbb{R} \to G$ の t における**微分**，または**接線**と呼び，$\dot{c}(t)$ とか $\partial_t^{\log}c(t)$ と書く．

$$\frac{d}{dt}c(t) = u(t)c(t), \quad \text{または} \quad X(t) = \dot{c}(t)c(t)^{-1}$$

のように書くこともある．$c : \mathbb{R} \to G$ が C^1-**曲線**であるとは c が各 t で微分可能で，$\partial_t^{\log}c(t)$ が t に関して連続となる場合をいう．G が加法群の場合には $\exp sX(t)$ を $sX(t)$ と同一視すれば (12.3) 式は通常の定義となる．

I を単位区間 $[0,1]$ とし，$C^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ を C^1-曲線 $c(t), t\in I$ 全体のなす集合とする．G の元 g は定数写像 $(\partial_t^{\log} g=0)$ と見て $C^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ の元である．$C_e^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ を始点が単位元 $c(0)=e$ であるような C^1-曲線全体のなす集合とする．一般には $C^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ は各点ごとの積で群をなさない．

定義 12.1　指数型の群 $(G,\mathfrak{g})$ が**滑らか**であるとは $C^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ が各点ごとの積で群をなしており，さらに $\forall g,h\in C_e^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ に対して

$$\partial_t^{\log} gh(0)=\partial_t^{\log} g(0)+\partial_t^{\log} h(0) \tag{12.4}$$

が成立し，$\forall g\in C_e^1(G,\mathfrak{g})$ に対して $\mathrm{Ad}(g(t))u$ は t に関して微分可能で

$$\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(g(t))u=\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp t\dot{g}(0))u \tag{12.5}$$

が成立し，かつ $\frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp tu)v$ が $(u,v)\in\mathfrak{g}\times\mathfrak{g}$ について連続となる場合をいう．これを $[u,v]$ と書きリーの括弧積と呼ぶ．

滑らかな指数型の群では $C_e^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ も各点ごとの積で群をなす．

指数型の群 $(G,\mathfrak{g})$ というだけでは $\mathrm{Ad}(g)v$ が $v\in\mathfrak{g}$ について線形かどうかわからないのだが，滑らかな指数型の群では $\exp tu\exp tv$ は C^1-曲線で，(12.4) 式より

$$\exp s(u+v)=\lim_{n\to\infty}\Big(\exp\frac{s}{n}u\exp\frac{s}{n}v\Big)^n \tag{12.6}$$

が成立する．これを使って次のことがわかる．

補題 12.1　滑らかな指数型の群では $\mathrm{Ad}(g)v$ は $v\in\mathfrak{g}$ について線形であり，$\forall g,h\in G$ に対して $\mathrm{Ad}(gh)=\mathrm{Ad}(g)\mathrm{Ad}(h)$ が成立する．

証明　定義より $\exp t\mathrm{Ad}(g)v=g\exp tvg^{-1}=\exp\mathrm{Ad}(g)(tv)$ だから t を ta として (E.2) を使うと $a\mathrm{Ad}(g)v=\mathrm{Ad}(g)(av)$ がわかる．(12.6) 式を使うと

$$\exp s\mathrm{Ad}(g)(u+v)=g\exp s(u+v)g^{-1}=g\lim_{n\to\infty}\Big(\exp\frac{s}{n}u\exp\frac{s}{n}v\Big)^n g^{-1}$$

であるが，群演算の連続性より次のようになる：

$$\lim_{n\to\infty}\Big(\exp\frac{s}{n}\mathrm{Ad}(g)u\exp\frac{s}{n}\mathrm{Ad}(g)v\Big)^n.$$

(12.6) 式より，これは $\exp s(\mathrm{Ad}(g)u+\mathrm{Ad}(g)v)$ である．

$\mathrm{Ad}(gh)=\mathrm{Ad}(g)\mathrm{Ad}(h)$ の証明は容易であろう．　（証明終わり）

系 12.1　滑らかな指数型の群 G では $(\mathfrak{g};[\,,\,])$ は位相リー代数である．これを $(G,\mathfrak{g})$ のリー環と呼ぶ．

証明　定義 12.1 で与えた $[\,,\,]$ が位相リー代数を定義することを示す．リー代数の定義は 2.1.1 項，位相の考え方は 4.1 節を参照してもらいたい．

補題 12.1 より $\mathrm{Ad}(\exp tu)v$ は v について線形であり，また (12.5) 式で t に関する微分も定義されているのだから $[u,v]$ は v に関して線形である．

一方，(12.5) 式の計算で $\forall a\in\mathbb{R}$ について $[au,v]=a[u,v]$ が得られ，さらに微分と Ad の性質を組み合わせて

$$\begin{aligned}[u+v,w] &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp tu\exp tv)w\\ &= \frac{d}{dt}\Big|_{t=0}\mathrm{Ad}(\exp tu)\mathrm{Ad}(\exp tv)w=[u,w]+[v,w]\end{aligned}$$

がわかる．これより u についての線形性が得られ，$[\,,\,]$ は双線形となる．連続性は定義 12.1 で仮定されている．また (12.2) 式の最初の式を微分して $[u,u]=0$ を得るから，双線形性より $[u,v]+[v,u]=0$ がわかる．(12.2) 式の第 2 の式と $\mathrm{Ad}(h)$ の連続性から $\mathrm{Ad}(h)[v,w]=[\mathrm{Ad}(h)v,\mathrm{Ad}(h)w]$ がわかる．ヤコビの恒等式は次の式を $t=0$ で微分して得られる：

$$\mathrm{Ad}(\exp tu)[v,w]=[\mathrm{Ad}(\exp tu)v,\mathrm{Ad}(\exp tu)w].$$

（証明終わり）

$C^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ の位相群としての構造

G は距離化群だから，$d:G\times G\to\mathbb{R}$ を G の右不変距離関数として，$C^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ に右不変な距離を入れて，距離化群にしよう．$g=g(\cdot)\in C^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ に対して $\mathfrak{g}$ のセミノルム系 $\|\cdot\|_k$ を使って

$$\rho_1(\dot g(t))=\sum_k\frac{1}{2^k}\frac{\|\dot g(t)\|_k}{1+\|\dot g(t)\|_k}\quad\text{((4.1) 式参照)}$$

として $\rho_n(g,e)=\max_{|t|\le n}\big(d(g(t),e)+\rho_1(\dot g(t))\big)$ をつくり

$$\rho(g,e)=\sum_n\frac{1}{2^n}\frac{\rho_n(g,e)}{1+\rho_n(g,e)}\quad\text{((4.1) 式参照)}$$

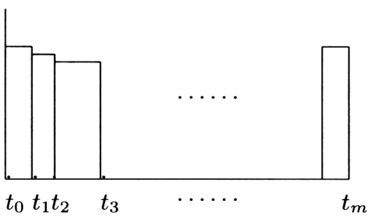
とし，$C^1(I,(G,\mathfrak{g}))$ 上に距離を $\rho(g,h)=\rho(gh^{-1},e)$ で定義すると，各点積に関して距離化群となることがわかる．（しかも再び指数型の群となる．これが再び滑らかな指数型の群になると思われる．）

12.1.3 群論的積分

群論的微分が定義できたからこんどは群論的リーマン積分を定義しよう．これは**積積分** (product integral) と呼ばれるもので，普通のリーマン積分の場合と同様に短冊で近似して定義する．

積積分を定義するためには G は少なくとも「微小なものを左から積する」という概念が G のどの元に対しても定義できていなければならない（曖昧被覆群はそれを可能にしているのだが，局所群が曖昧束に作用している場合にもこれは可能である）．

指数型の群 G を考え $I=[a,b]$（閉区間）とする．I から $\mathfrak{g}$ への写像 $u: I\to\mathfrak{g}$ が**短冊写像** (step function) であるとは I の分割 $a=t_0<t_1<\cdots<t_m=b$ があり各区間 $[t_i,t_{i+1})$ で u は一定の場合をいう．I の分割点の集合 $\Delta=\{t_0,t_1,\cdots,t_m\}$ を I の分割と呼ぶこともある．$|\Delta|=\max_{1\le i\le m}\{|t_i-t_{i-1}|\}$ のことを I **の分割の幅**と呼ぶ．



I から $\mathfrak{g}$ への任意の連続写像 $v: I\to\mathfrak{g}$ は I の任意の分割 Δ に対して左の図のようにして短冊写像 v_Δ をつくると，次第に分割幅が小さくなっていく（短冊写像）の列 $\{v_{\Delta_n}\}_{n=1,2,\cdots}$ で一様に近似できる．短冊写像に対して積積分を

$$\prod_a^t \exp u(s)ds=\exp(t-t_k)u(t_k)\exp(t_k-t_{k-1})u(r_{k-1})\cdots\exp(t_1-t_0)u(t_0)$$

で定義する．

指数型の群 $(G,\mathfrak{g})$ が**積可積分**であるとは任意の連続写像 $v: I\to\mathfrak{g}$，およびそれを一様に近似する任意の短冊写像の列 $\{u_n\}_{n=1,2,\cdots}$ に対して積積分 $\prod_a^t \exp u_n(s)ds$ が C^1-曲線 $g(t)$ に収束し，しかも $\partial_t^{\log}g(t)=v(t)$ となる場合をいう．$g(t)$ のことを $\prod_a^t \exp v(s)ds$ と書く．

積可積分な指数型の群では任意の連続写像 $v: I\to\mathfrak{g}$ に対して微分方程式 $\frac{d}{dt}g(t)=v(t)g(t)$ を解くことができ，解は積積分を用いて $\prod_a^t \exp v(s)ds$ で与えられる．

12.2　汎リー群

指数型の群 $(G,\mathfrak{g})$ が**滑らかで積可積分**のとき**汎リー群**と呼ぶ.

法則というもの

法則が書けているというだけでは空論である. その法則に従う個々のものが組み込まれていない理論は空論である.

定理 12.1　汎リー群 $(G,\mathfrak{g})$ においては, $\mathfrak{g}$ はフレシェ－リー環になっている. $\mathrm{Ad}(g):\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ はリー環の自己同型である.

定理 12.2　M をコンパクトで境界のない C^∞-多様体とすると, C^∞-位相と呼ばれる位相に関して $(\mathcal{D}(M),\mathcal{X}(M))$ は汎リー群となる. さらに半直積群 $\mathcal{D}(M)\rtimes C^\infty(M)$ も汎リー群である.

実はこの場合 $\mathcal{D}(M)$ は強 ILH-リー群と呼ばれる性質を持つ. これは汎リー群よりはるかに強い性質である. 汎リー群の良さは次に述べるような便利な性質である.

12.2.1　汎リー群の基本定理

群の概念は概念構成のときにも重要になるものだが, そういう目的のためならば汎リー群はきわめて使いやすい.

汎リー群というのは群とリー環の組だから, その意味では純粋の群論には属さないものであるが, 有限次元のリー群は自然に含まれている.

定理 12.3　G を有限次元の（普通の意味の）リー群とし, $\mathfrak{g}$ を単位元 $e\in G$ での G の接空間とすると $(G,\mathfrak{g})$ は汎リー群である.

逆に汎リー群 $(G,\mathfrak{g})$ が $\dim\mathfrak{g}<\infty$ であり, さらに exp 写像が $\mathfrak{g}_0$ の 0 のある近傍 U_0 から G の単位元のある近傍 V_e の上への写像になっているならば G は有限次元の（普通の意味の）リー群である.

汎リー群

概念構成のときに現れる推移性を持った最大の群が（無限次元の）汎リー群であると仮定したとしてもそれほど違和感はないはずなのである．汎リー群は多様体と同じレベルの必要悪である．しかし，多様体よりは広くなっている．注目してもらいたいのは，ものごとを理解するときどのような言語で行なうかということである．よく考えてみれば，これは数学が決めることではなくて時代が決めることである．汎リー群は 21 世紀の必要悪なのである．

命題 4.1 を思い出してもらいたいが，無限次元になった場合汎リー群が使いやすいというのは次の 2 つの定理が成立するからである（[22] 参照）．

定理 12.4 $(G, \mathfrak{g})$ を汎リー群，H を G の閉部分群とする．$\mathfrak{h} = \{u \in \mathfrak{g}; \exp tu \in H, \forall t \in \mathbb{R}\}$ とすると $\mathfrak{h}$ は $\mathfrak{g}$ の閉部分リー環であり，$(H, \mathfrak{h})$ は汎リー群となる．

定理 12.5 $(G, \mathfrak{g})$ を汎リー群，N を G の閉正規部分群とする．$\mathfrak{n} = \{u \in \mathfrak{g}; \exp tu \in N, \forall t \in \mathbb{R}\}$ とすると $\mathfrak{n}$ は $\mathfrak{g}$ の閉部分リー環であり，かつリーイデアルとなる．さらに $(G/N, \mathfrak{g}/\mathfrak{n})$ は汎リー群である．

閉部分リー環から生成される部分群

汎リー群 $(G, \mathfrak{g})$ において $\mathfrak{g}$ の閉部分リー環 $\mathfrak{h}$ が与えられたとする．このとき $\mathfrak{h}$ をリー環に持つ G の閉部分群 H はあるだろうか？　指数写像があるのだから $\exp \mathfrak{h}$ から生成される部分群をつくり，その閉包を $\tilde{H}$ とする．定理 12.4 より $(\tilde{H}, \tilde{\mathfrak{h}})$ は汎リー群であり $\mathfrak{h} \subset \tilde{\mathfrak{h}}$ であるが，一般に等号は成立しない．

また $\forall h \in \tilde{H}$ に対して $\mathrm{Ad}(h)\tilde{\mathfrak{h}} = \tilde{\mathfrak{h}}$ は成立しているが，$\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$ は一般には成立しない．

注意 12.1 リー代数 $\mathfrak{h}$ をリー環に持つ滑らかな指数型の群があるなら，少なくとも

$$(\heartsuit): \qquad \mathrm{Ad}(\exp tu)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}, \quad \forall u \in \mathfrak{h} \tag{12.7}$$

が成立していなくてはならない．しかしこの条件は一般には成立しないのである．

滑らかな指数型の群の定義より $C^1(I, (G, \mathfrak{g}))$ は各点ごとの積で群をなし，$C^1_e(I, (G, \mathfrak{g}))$ は正規部分群になっている．また，$c \in C^1_e(I, (G, \mathfrak{g}))$ に対し $\pi(c) = c(1)$ と定義すると $\pi : C^1_e(I, (G, \mathfrak{g})) \to G$ は準同型になっている．

$C^0(I, \mathfrak{g})$ を I から $\mathfrak{g}$ への連続写像全体とする．写像 $\delta : C^1_e(I, (G, \mathfrak{g})) \to C^0(I, \mathfrak{g})$ を $\delta(g)(t) = \dot{g}(t)g(t)^{-1}$ で定義する．

δ は全単射で δ^{-1} は積積分で与えられるから δ を通して群 $C^1_e(I,(G,\mathfrak{g}))$ の構造を $C^0(I,\mathfrak{g})$ に持ち込むことができる．$\forall u,\,v\in C^0(I,\mathfrak{g})$ に対して積 $u*v$ は次式で与えられる：

$$u*v(t)=u(t)+\mathrm{Ad}\Big(\prod_0^t\exp u(\tau)d\tau\Big)v(t). \tag{12.8}$$

リー環は $C^0(I,\mathfrak{g})$ 自身で括弧積 $[\cdot,\cdot]$ は

$$[u,v](t)=\big[\textstyle\int_0^t u(s)ds,v(t)\big]-\big[\textstyle\int_0^t v(s)ds,u(t)\big]$$

で与えられるが，

$$\mathrm{Ad}\Big(\prod_0^t\exp u(\tau)d\tau\Big)=\prod_0^t\mathrm{Ad}(\exp u(\tau))d\tau=\prod_0^t\exp\mathrm{ad}(u(\tau))d\tau \tag{12.9}$$

でもあるから (12.8) 式は $\exp\mathrm{ad}(u)$ が $\mathfrak{g}$ の自己同型として定義されている限りリー環の演算（と微積分）だけで書くことができる．

射影 $\pi:C^0(I,\mathfrak{g})\to G$ を $\pi(u)=\prod_0^1\exp u(\tau)d\tau$ のように定義すると，π は G の連結成分の上への連続な準同型となる．

π の核 $\{c;\pi(c)=e\}$ を $\Omega(G)$ と書くと $\Omega(G)$ は $(C^0(I,\mathfrak{g}),*)$ の正規閉部分群となる．$\Omega(G)$ の単位元の連結成分 $\Omega(G)_0$ も正規閉部分群でここでの群演算はリー環の演算（と微積分）だけで書くことができる．

この観察をもとにすると，リー環が与えられたとき $\exp\mathrm{ad}(u)$ が $\mathfrak{g}$ の自己同型として定義されている限り $(C^0(I,\mathfrak{g}),*)$ に群構造を入れられる．

$\mathfrak{g}$ の閉リー部分環 $\mathfrak{h}$ で (12.7) 式の必要条件 (♡) を満たすものとする．$C^0(\mathfrak{h})$ は $C^0(\mathfrak{g})$ の線形閉部分空間であるが次が成立する．

定理 12.6　$C^0(\mathfrak{h})$ は (12.8) 式で定義される群 $C^0(\mathfrak{g})$ の部分群である．

証明　$u,v\in C^0(\mathfrak{h})$ に対し $x(s)=\prod_0^s\exp u(\tau)d\tau$ とする．(12.8) 式より $\mathrm{Ad}(x(s))\mathfrak{h}=\mathfrak{h}$ を示せばよい．$u_n(s)$ を $\mathfrak{h}$ の連続曲線を近似する短冊関数とすると，$\mathrm{Ad}(\prod_0^s\exp u_n(\tau)d\tau)\mathfrak{h}=\mathfrak{h}$ は (12.7) の条件より明らかだから極限移行をすればよい．（証明終わり）

$C^0(\mathfrak{h})$ はフレシェ空間の線形閉部分空間だから定理 12.6 より $C^0(\mathfrak{h})$ は距離化群となる．$\Omega(G)\cap C^0(\mathfrak{h})$ は $C^0(\mathfrak{h})$ 正規閉部分群となること，および

$$H = C^0(\mathfrak{h})/\Omega(G) \cap C^0(\mathfrak{h})$$

が G の閉部分群となることに注意すると次の定理が得られる．

定理 12.7（部分群の存在） $(G, \mathfrak{g})$ を汎リー群，$\mathfrak{h}$ を $\mathfrak{g}$ の閉リー部分環で条件 $(\heartsuit)$ を満たすものとすると，G の閉部分群 H で次の性質を持つものが存在する：(1) $\exp \mathfrak{h} \subset H$，(2) $\forall h \in H$ に対して $\mathrm{Ad}(h)\mathfrak{h} = \mathfrak{h}$，(3) $\forall h \in H$ は H 内に含まれる C^1-曲線で単位元 e と結べる．

経路積分との関係

汎リー群 $(G, \mathfrak{g})$ において G の元が有限次元多様体 M 上の積分作用素

$$(L \cdot f)(x) = \int_M L(x, y) f(y) dy, \quad f \in C^\infty(M)$$

として与えられているような場合には $X(s) \in \mathfrak{g}$ に対して $\exp tX(s) \in G$ は

$$(\exp tX(s) \cdot f)(x) = \int_M K(t, s, x, y) f(y) dy$$

のような形に書かれるであろう．K は超関数の積分核と思ってよい．

経路積分

物理の人たちのいう経路積分 (path integral) は結局上に述べた積積分のことである．見方を変えれば，法則を群論的に書こうとしているものと見える．

すると積積分 $(\prod_a^t \exp X(s)ds \cdot f)(x)$ は

$$\lim_{|\triangle| \to 0} \int \cdots \int K(t - t_k, t_k, x, y_k) K(t_k - t_{k-1}, t_{k-1}, y_k, y_{k-1}) \cdots$$
$$\cdots K(t_1 - t_0, t_0, y_0, y_{-1}) f(y_{-1}) dy_k dy_{k-1} \cdots dy_0 dy_{-1}$$

といったように見えるであろう．ただし $\triangle = \{a = t_0, t_1, \cdots, t_m = b\}$ は $[a, b]$ の分割である．

そこで $K(t, s, x, y)$ が $(1 + tg(s, x, y))\, e^{itL(s,x,y)}$ のように極座標表示されているものと仮定すると，積分記号下の量（被積分関数）は

$$\prod_a^t (1 + g(s, x, y(s))ds)\; e^{i\int_a^t L(s,x,x(s))ds}$$

のように理解されるであろう．ただし $x(s)$ は M 内の曲線で $x(a) = y_{-1}$, $x(t_i) = y_i$, $x(t) = x$ となるようなものとする．

このように見ると積積分の位相部分（e の肩の部分）はある意味で $\exp\int_a^t L(s,x,x(s))ds$ を経路の空間 $\mathcal{P}$ 上で積分したものとして理解される．これは形式的には

$$\int_{\mathcal{P}} \exp\left\{ i\int_a^t L(x,x(s))ds \right\} d\mu(x(\cdot))$$

のように書かれる．これは**ファインマンの経路積分**と呼ばれているものである．

$d\mu(x(\cdot))$ は $\mathcal{P}$ 上の可算加法的測度（数学で普通使う測度）にはなり得ないことがわかっているが，考え方が重要なのであって，本当の意味での測度になっていなくてもまったくかまわないものである．とはいえ測度になっていないとするとどのような計算が許されるのかわからないうらみはある．この本ではファインマンの経路積分を積積分と理解しているのである．

もし停留位相法と呼ばれる手法がこの積分にもあてはまるならばこの積分に対する最も強い寄与は位相（位相空間の位相の意味ではなく，ge^{if} の f の部分）が停留している経路からくるはずで，それは位相の停留条件 $\delta\int_a^t L(s,x(s))ds = 0$ を満たす経路である（このように考える理由は f の変化が激しいところでは e^{if} の部分は積分すると打ち消しあう部分が多くなり全体にはほとんど影響を与えないと考えられるからである）．

古典力学はこの停留条件を変分原理として採用しているのだから，別の言葉でいえば**ファインマン経路積分は停留位相法込で考えると古典力学で最小作用の法則とか変分原理とか呼ばれているものが物理理論の中で基本的役割を担う理由**を与えるのである．

> しかし，前章で見たように $e_*^{tX(s)}$ の極座標表示は 1 つの表示法だけでは発散してしまうといったことが起こる．いろいろな表示法を組み合わせて使わねばならないし，生成される“群”も曖昧被覆群のようなものである．

12.3　汎リー群の作用

1.2.1 項で群の作用という概念は与えてあるが，ここでは汎リー群 $(G, \mathfrak{g})$ が別の σ-フレシェ空間 V に作用するということを定義しよう．この概念はこれまで

のいきさつからすると汎リー群の曖昧被覆群が齟齬束に作用するという概念として拡張して定義すべきものではあるのだが，これは完全には固まっていないので，このことは別の機会に譲って，ここでは表題の概念だけにとどめておく．

写像 $\rho : G \times V \to V$ が汎リー群 $(G, \mathfrak{g})$ の V への**作用**であるとは，ρ が左のような 4 つの性質を持つ場合をいう．たんに線形同型として作用しているというだけでなく，(4) のような微分可能性を持つことが特徴である．これにより，次項の無限小作用という概念が設定できるのである．

(1) $\rho(g) : V \to V$ は連続線形写像
(2) $\rho(gh)v = \rho(g)\rho(h)v$
(3) $\rho(e)v = v$
(4) $\forall g(\cdot) \in C^1(G, \mathfrak{g})$ に対し，$\rho(g(t))v$ は t に関して C^1

12.3.1　リー環，無限小作用

$\rho : G \times V \to V$ は汎リー群 $(G, \mathfrak{g})$ の V への作用とする．$\forall u \in \mathfrak{g}$ に対して $\exp tu \in C^1(G, \mathfrak{g})$ であるが，

$$\dot{\rho}(u)v = \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} \rho(\exp tu)v$$

と定義し，これを $(G, \mathfrak{g})$ の**無限小作用**という．第 3 章で述べたように，観測は対象に微かな痕跡を残す．この「微か」を表現するのが無限小作用であった．

汎リー群の定義より，$\mathrm{Ad}(g)(u)$ を $\mathrm{Ad} : G \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ と考えたものは汎リー群 $(G, \mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}$ への作用である．

$\mathfrak{g}^*$ を $\mathfrak{g}$ の双対空間（$\mathfrak{g}$ から $\mathbb{R}$ への連続線形写像全体のなす空間）とする．$\mathrm{Ad}(g) : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$ の双対写像として $\mathrm{Ad}^*(g) : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ を定義すると，$\mathrm{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ も汎リー群 $(G, \mathfrak{g})$ の $\mathfrak{g}^*$ への作用である．

12.3.2　均質空間

汎リー群 $(G, \mathfrak{g})$ の V への作用 ρ が与えられたとき，V の元 $v_0 \neq 0$ を勝手に固定し，v_0 を動かさない G の元全体 $H = \{g \in G; \rho(g)v_0 = v_0\}$（等方部分群）を考える．$H$ は閉部分群であり商空間 $M = G/H$ は自然に V の部分集合 $\rho(G)v_0$ と同一視される（$H = \{e\}$ という場合もあることに注意してもらいたい）．M の点は $[g](= gH)$ のように表される．$o = [e]$ としておく．また $\pi : G \to M$ $(\pi(g) = [g])$ を自然な射影とする．

$(G, \mathfrak{g})$ が汎リー群で H がその閉部分群のときには商空間 $M = G/H$ はたん

に距離空間という以上に多様体に近い性質を持つ．

$\mathfrak{h}=\{u\in\mathfrak{g};\exp tu\in H\}$ とすれば，$\mathfrak{h}$ は閉部分リー環であり，商空間 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ は点 o における M の接空間と思うことができる．$\forall h\in H$ に対して $\mathrm{Ad}(gh)\mathfrak{h}=\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}$ は明らかで，商空間 $\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}$ は $[g]\in M$ のみで定まるから，これを点 $[g]\in M$ における接空間と思うことができる．接束にあたるものは $\coprod_{[g]\in M}\mathfrak{g}/\mathrm{Ad}(g)\mathfrak{h}$ で定義され，$\forall u\in\mathfrak{g}$ はこれの切断とみなせる．これを接ベクトル場とみなすのである．

M からフレシェ空間 E への写像 $\varphi:M\to E$ について，$\varphi\pi:G\to E$ が C^1-級の写像であるとは，$\forall c\in C^1(I,(G,\mathfrak{g}))c$ に対し $\varphi\pi c(t)$ が t に関して（普通の意味の）C^1-級写像になる場合をいう．$\varphi\pi$ が C^1-級のとき φ を C^1-級写像と呼ぶ．

後はほとんど定義の繰り返しになるから細部は省略するが，大略，第 1，2 章を参考にしてこのように定義していくとさまざまな存在定理が組み込まれた“多様体” が定義されるのである．

12.3.3 汎リー群の均質空間としての状態空間

上のことを考えて，可能観測のなす代数 $\mathcal{O}$ は（可換とは限らない）σ-フレシェ代数で，これにある汎リー群 $(G,\mathfrak{g})$ が自己同型群として作用している（上の定義参照）という状況で考える．

第 1 章で $\mathcal{O}$ の性質だけで多様体の C^∞-性を定義するのは難しいと述べたが，汎リー群が自己同型群として作用しているような場合にはかなりわかるのである．

リー群的発想

第 4 章の μ-制御代数では $\mu^{-1}*\mathcal{O}$ はリー環をなす．前章のいきさつを考えれば，これが何かある汎リー群 $(G,\mathfrak{g})$ のリー環 $\mathfrak{g}$（を係数拡大したもの）であると考えてよいだろう．この場合には $\forall a\in\mathcal{O}$ に対して 1 径数部分群 $\exp t\mu^{-1}*a$ が存在し $\mathrm{Ad}(\exp t(\mu^{-1}*a)b)=\exp t\,\mathrm{ad}(\mu^{-1}*a)b$ が成立している．

$p:\mathcal{O}\to\mathbb{R}$ を全射連続準同型とする．これが古典的「点」であった．M を $\mathcal{O}$ から $\mathbb{R}$ への全射連続準同型の全体とする．$\mathfrak{I}=\bigcap_{p\in M}\{f\in\mathcal{O};p(f)=0\}$ とすれば $\mathfrak{I}$ は閉イデアルで商代数 $\tilde{\mathcal{O}}=\mathcal{O}/\mathfrak{I}$ は可換なフレシェ代数となり，$\tilde{\mathcal{O}}$ の元は M 上の関数と思うことができる．G は M に自然に作用している．

補題 12.2　$\varphi_t^{(i)}:\mathcal{O}\to\mathcal{O}$ $(i=1,\cdots,d)$ が $(G,\mathfrak{g})$ の 1 径数部分群とする．こ

のとき $\forall f \in \mathcal{O}$ に対して $p \circ \varphi_{t_1} \cdots \varphi_{t_d}(f)$ は $(t_1, \cdots, t_d) \in \mathbb{R}^d$ について C^∞ である．

証明 φ_t の無限小生成元 X は $\mathcal{O}$ の微分になっているから $\frac{d}{dt} p \circ \varphi_t(f) = \frac{d}{ds}\Big|_{s=0} \varphi_{t*}(p) \circ \varphi_s(f) = p \circ \varphi_t(Xf)$ となって，$p \circ \varphi_t(f)$ は各 t で微分可能，とくに連続でもある．ところが Xf も $\mathcal{O}$ の元だから，上のことを $p \circ \varphi_t(Xf)$ にあてはめると $\frac{d}{dt} p \circ \varphi_t(f)$ が連続，つまり $p \circ \varphi_t(f)$ が C^1-級となる．すると $p \circ \varphi_t(Xf)$ も C^1-級だから $p \circ \varphi_t(f)$ が C^2-級となる．この議論を繰り返して $p \circ \varphi_t(f)$ が C^∞-級であることがわかる．

変数が多くなっても $\varphi_{t_i}(f) \in \mathcal{O}$ などに注意すれば同じことの繰り返しである．各 t_i について C^∞ で偏微分は上の式の $\varphi_{t_i}^{(i)}$ のすき間に X_i が入ったものとなる．これも各 t_i について C^∞ ということから，上の式が $(t_1, \cdots, t_d)$ に関して C^∞ が結論される．（証明終わり）

第 1 章では $p \in M$ を状態と呼び，状態変化の自由度を考えたのだが，このとき**状態を動かす**という概念を素朴な意味で使っていた．しかし，第 3 章で不確定性を考えたときにはこの動かし方も力学の法則に従うべきものとしており，一定の枠の中で考えている．ここでは**状態を動かすのは，G の元であると考え**これ以外の動かし方は考えないことにする．

定義 12.2 $p \in M$ の自由度が d であるとは $\tilde{\mathcal{O}}$ の元 $f_1, \ldots, f_d$，$\mathfrak{g}$ の元 $X_1, \ldots, X_d$，および p の近傍 V_p があって，次の性質を持つ場合をいう：

- $(X_i f_j)(p) = \delta_{ij}$.
- $\forall f \in \tilde{\mathcal{O}}$ に対し d-変数の関数 Φ があって，$\forall p' \in V_p$ で $f(p') = \Phi(f_1(p'), \cdots, f_d(p'))$ が成立．

Φ が連続関数というところまでは一般にわかるのだが，第 1 章では C^∞ ということを天下りに仮定していた．

定理 12.8 $\mathcal{O}$ の自由度が一定 d（有限）ならば M は d-次元 C^∞-多様体であり，$\tilde{\mathcal{O}}$ の元はすべて C^∞-関数である．

証明 p を任意に固定すると仮定より $X_1, \cdots, X_d \in \mathfrak{g}$ がある．X_i は 1 径数部分群 $\varphi_t^{(i)}$ の無限小生成元であるとしてよい．

補題 12.2 より $\forall f \in \mathcal{O}$ に対して $\varphi_{t_1}^{(1)} \circ \cdots \circ \varphi_{t_d}^{(d)}(f)(p)$ は $(t_1, \cdots, t_d)$ につき C^∞ である．

したがって $(t_1, \cdots, t_d)$ が座標関数となることを示せば十分である．p の近傍での局所座標系が p を原点として $(x^1, \cdots, x^n)$ と与えられているとすると，仮定より $x^i \in \mathcal{O}$ だから $f = x^i$ として，$x^i(t_1, \cdots, t_d)$ が C^∞ となる．点 p で微分を考え，逆関数定理を使えば，$t_1, \cdots, t_d$ を座標関数に使ってよいことがわかる．

（証明終わり）

12.4　余随伴軌道

状態空間 M もまたわれわれの行動によって獲得されたものであるとするならば，行動の群 G は M に推移的に作用しなくてはなるまい．その作用を λ とする．この作用は忠実 (faithful) としておいてよい．つまり，$\lambda(g) =$ 恒等写像のとき，$g = e$ としておいてよい．これは $N = \{g \in G; \lambda(g) = e\}$ とすると N が閉正規部分群となるから G の代わりに G/N を考えればすむからである．

状態の全体を M，そこに定義される無限小の変化を表すベクトル場の全体を $\mathfrak{g}$ とする．G は $\mathfrak{g}$ と一緒に汎リー群 $(G, \mathfrak{g})$ を構成していると考える．

$u \in \mathfrak{g}$ のとき $u(p)$ が $p \in M$ に引き起こされる微小変化である．M 上の 1 次微分形式 ω は観測手段とみなされていたが，これが $\forall g \in G$ に対して

$$\omega(\mathrm{Ad}(g)u)(p) = \omega(u)(g(p))$$

という性質を持つとき **G-不変**であるという．G は M に推移的に働くから，1 点 p で $\{\omega(u)(p); u \in \mathfrak{g}\}$ がわかれば他の点についてもわかることになる．

p を固定すれば $u \to \omega(u)(p)$ は $\mathfrak{g}$ から $\mathbb{R}$ への連続線形写像となるから $\mathfrak{g}$ の双対空間 $\mathfrak{g}^*$ の元を与える．以下では $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$ と仮定する（この性質を持つ空間を**反射的空間**という）．

一方，随伴表現があるのだから双対随伴表現 $\mathrm{Ad}^* : G \times \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}^*$ も自然に考えられ，$\omega(\mathrm{Ad}(g)u)(p) = (\mathrm{Ad}^*\omega)(u)(p)$ となる．$\mathrm{Ad}^*(G)(\omega)$ を**余随伴軌道**と呼ぶ．

余随伴軌道にまつわる理論は「理想化された観測論」といった色彩を持っているのであるが，これも繰り返しになるのでここでは省略する．

行動主体に考えるならば，状態空間は余随伴軌道，観測なるものは G-不変 1 次微分形式としなければならない．

12.4.1 余随伴軌道上のシンプレクティック構造

まず，$\mathfrak{g}^*$ をポアソン多様体として考えることをしよう．$\forall u \in \mathfrak{g}$ は $\mathfrak{g}^*$ 上の 1 次関数と思えるから，各点積で多項式などが考えられる．

$\mathfrak{g}^*$ 上の C^∞-関数 f, g と，$p \in \mathfrak{g}^*$ に対して df_p, dg_p は $\mathfrak{g}^*$ から $\mathbb{R}$ への連続線形写像だから $\mathfrak{g}^{**} = \mathfrak{g}$ の元である．したがって，リー括弧積が $[df_p, dg_p] \in \mathfrak{g}$ と定義できるから $\{f, g\}(p) = [df_p, dg_p](p) = \langle p, [df_p, dg_p] \rangle$ と定義する．

補題 12.3 上の $\{f, g\}$ で $\mathfrak{g}^*$ はポアソン多様体となる．

証明 $\{f, g\}$ がポアソン括弧積になっていることを示せばよい．$f, g, h \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ とする．

$$\begin{aligned}\{f, gh\}(p) &= [df_p, (dg_p)h(p) + g(p)(dh)_p](p) \\ &= [df_p, (dg_p)](p)h(p) + g(p)[df_p, (dh)_p](p)\end{aligned}$$

に注意すればよい（例 4.1，例 9.1 参照）． （証明終わり）

$\mathfrak{g}^*$ がポアソン多様体となったから，$\forall f \in C^\infty(\mathfrak{g}^*)$ について $\mathrm{ad}(f) = \{f, \cdot\} = u_f$ は $\mathfrak{g}^*$ 上の接ベクトル場と考えられる．

補題 12.4 上の $\mathrm{ad}(f)$ は $\mathfrak{g}^*$ 内の各余随伴軌道に接している．

証明 点 $p \in \mathfrak{g}^*$ の余随伴軌道 $\mathrm{Ad}^*(G)(p)$ の p での接空間は

$$T_p(\mathrm{Ad}^*(G)(p)) = \left\{ \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}^*(\exp tu)(p); u \in \mathfrak{g} \right\}$$

で与えられる．「接する」とは $\mathrm{ad}(f)(p) \in T_p(\mathrm{Ad}^*(G)(p))$ の意味である．$df_p \in \mathfrak{g}$ であるから

$$\begin{aligned}\mathrm{ad}(f)(p)g = [df_p, dg_p](p) &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} p(\mathrm{Ad}(\exp t(df_p))dg_p) \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}^*(\exp t(df_p))(p)(dg_p).\end{aligned}$$

これを $\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \mathrm{Ad}^*(\exp t(df_p))(p)g$ とも書く．$df_p \in \mathfrak{g}$ であるから，これは $T_p(\mathrm{Ad}^*(G)(p))$ の元であることがわかる． （証明終わり）

定理 12.9 汎リー群の余随伴軌道が有限次元多様体ならばシンプレクティック多様体である.

詳しい証明は [29] に譲ることにする.

> この辺はもっと精密に細分化された話として構成すべきものであるが，話が専門的になりすぎるし，第一，このようなものの評価はまだ定まっていないから，この辺の細かい話は別の機会に譲ることにする.

何が望まれているか

「不確定性原理を認めると，どうしても多価の元というこれまでの数学の中ではほとんど扱われたことのないものを使って幾何学をつくるという作業に向かわざるを得ない」というのがこの本の結論なのだと私は思っている．これをリーマン面とモジュライ空間だけで処理できると思うのはちょっと虫がよすぎると思ってもいる．

これは重たい選択なのであって，少し広く考えると，数学全体を 1 から再構成する作業が含まれてしまうのである．ここまでやらなくても適当な妥協点がありそうに思えるのだが，比較的取り扱いが容易で，かつ実り多いものはどの辺にあるのかよくわからない．今日の場の理論は経路積分という数学的にはっきり定義できていない無限次元空間上の「積分論」を理論の支柱に据えて展開されることが多いが，これの数学的中身を探るとどうしてもコホモロジー論のような「多様体社会学」になってしまい，われわれの素朴な時空がどこにあることになるのか見えにくいし，この本で扱われている微積分の代数の多価性を吸収する方策は見えてこない．

この本で述べてきた多価性は，もともと微積分の代数の中に含まれていたものであるから，(拡張された) 微積分を表現手段として使っているものすべてに含まれている多価性のはずなのである．

局所群でありながら，これが群の中には埋め込まれず，曖昧汎リー群のような齟齬を許したものの中にしか埋め込めないようなものは（具体的な例は持っていないが）ざらにあると思われるのである．こういうものが背後にあるようなところで，均質空間論にあたるものをつくればよいとは思うのだが，曖昧汎リー群のようなところでは均質空間にあたるものを点集合としては構成できないから，この辺のところをどのようなものを基礎にして組み上げればよいのか暗中模索である．

おわりに　砂漠の道案内人の弁

ためらいと，一抹の不安を感じつつもここでこの本を終わりとしたいのだが，読者は何か砂漠の真ん中に連れてこられて置き去りにされるような気分になっているのではあるまいか．はからずも怪しげな砂漠の道案内人の役目をはたしてしまった半死白頭翁の私も，しかし同じ気分なのである．あと何十キロ進めばオアシスがあるとか，どの方向に楽園があるとか何一つはっきりしていないのである．私と読者はいわば運命共同体としてこの場所に立っているのである．

しかも，この道案内人，いささか無責任でもある．なにしろ「体力が続く限り自分の足元を掘ってごらん．たぶん豊富な水脈が眠っているから…」と言いたがっているのだから…….

量子論は物理としてはかなりわかってしまったものである．しかし数学の側から見ると，(数学としては無定義の) 物理概念を駆使して微積分の代数を操る場面が多く，さっぱりわからないものである．再度述べるが，数学では「自然数の公理，集合論の論理」のみから定義できるものしか「存在」と認めていないのである (これが数学の数学たるゆえんなのだから，これは一歩もゆずれない)．この立場の違いをはっきり意識してもらいたいのである．

量子論をもう一歩数学の側に近づけるには，量子論をなるべく (演算子的に見た) 微積分の計算の中だけで純数学的に説明してみせることが必要であり，筆者はそれが可能であらねばならないと信じている者である．理由はきわめて単純で物理はいろいろな解釈，意味づけはするが微積分以外のものを使っていないからである．つまり，数学の側から見ている限り，(ウィッテン教授にとっては数学の中のトポロジー分野で起こっていることが物理現象として見えてしまったのと同様に) 量子論とは微積分の代数の学の現象でしかありようがないのである．したがって多くの物理学上の謎は突き詰めると微積分の代数の学がもともと持っている謎なのであり，そのほんの一角が物理学上の謎として出現しているだけなのである．

物理はそれに物理でしか理解できない解釈を与えているのだが，数学的には意味不明の解釈を与えただけなのである．これをそのまま容認する人はだから

物理学者なのであって，少なくとも幾何学者とは思えないわけである．筆者は幾何学者であり続けたいと願っている者であって，物理学者の末席を汚すことを望んでいるわけではないのである．

この本の狙いは微積分演算子の代数が謎に満ちていることを，それなりに系統的に読者に伝えようとしたところにあるのだが，よくわかっていないことまで書こうとしたために，本書はかなり尻切れトンボになっていると思う．とくに曖昧束についてはこういう概念が出始めてまだ日が浅いために全数学に及ぼす影響などについては予測ができにくい部分がある．しかしブルバキが意図した数学からはみ出たものであることは確かだから，これが将来どのように発展していくのか筆者の期待を込めた予測をここに書き記しておこう．

量子論には普通の決定論的数学とは違う統計的性格がある．ヒルベルト空間のノルムはしばしば存在確率と解釈されているのだが，数学でいう（測度論的）確率論の立場からこれを解釈するのは難しい．

さらにボゾンとフェルミオンというまったく違う性格のものが共存しているという奇妙さもある．この奇妙さも多くの数学者を悩ましている難題なのであって，何とか「物理ではそうなっている」という言い訳をしないで数学的にこの2つを数学論理の中に共存させることができないものだろうかということは物理に興味を持つ数学者ならみな気にしてきたことである（super 理論はその目的のために出てきたものだが，あまり浸透しないのはやはり何か不自然さを感じてしまうからではなかろうか？）．

微積分の公理系の中にこのような統計的性格の違う2つのものを取り込むのは難しいと考えられているのであるが，齟齬とか曖昧束のようなものまで微積分は含むのだから，このへんが手がかりになりそうな気がする．筆者は齟齬とか曖昧被覆のような概念が時間の反転の問題もこめて上に述べたことを解決する突破口になるものと密かに期待しているのである．

齟齬を許すと，1つ1つの点は大域的には識別できないから，個性を殺したマスとしての法則，あるいは確率的法則しか書けなくなるからである．さらに齟齬が現れる理由を微積分の代数で見る限り，逆元が2つ見つかるといった結合律を破る現象と密着している．どちらの逆元を採用しても理論は等価だが両方採用すると結合律が破れるから，対称性を犠牲にして結合律を守らねばならなくなるのである．こういうものを通して量子論の基礎をもう一歩数学寄りに書き換えておいて，それからでないと，数学者は場の理論のほうには安直に行

けないであろうと思うのである．とくに場の理論の発散の困難と言われているものは何か点集合でないところで救済策を立てないといけないと思われているのである．

断っておくが，これらのことは数学の問題であるべきなのであって，物理的解釈で切り抜けるものではないということである（にもかかわらず，物理が微積分を使っている以上，数学上の謎は物理における謎でもあり，物理学者がその謎を解決しようとしている努力は数学的解決を模索するときのよいヒントなのである）．

さらに，量子論を数学の中に論理的に取り込む方法をいろいろ考えようとするならば，閉じた微積分学ではなく，微積分の代数という開いた系の中で数学を構築するというプランをはっきり意識する必要があると思われる．

これは，数学というものの性格を「論理的に閉じているが故に尊とし」とするのではなく，パラドックスを受け入れる包容力を持ったものに変質させることであり，これが急務であろうと思われる．

微積分学は完成された学問のように言われることが多いのだが，完成しているのは，実数連続体上での極限概念を通じての基礎の部分のみであり，微積分演算子のつくる（拡張された）代数の部分はこの本で指摘したように謎に満ちているのである．その最たるものは（よくわかっていないので）この本ではあまり触れなかったが，局所化の概念を含めて，「変数を束縛する」という概念である．つまり，古典微分幾何では（点集合の概念を使って）曲面（部分多様体）が自由に考えられたのに対して，微積分の演算子を主体にした量子論的数学の中にはガウスの曲面論にあたるものがないのである．たとえば「球面」といえば誰でも一定のイメージを描くだろうが，量子論的球面はその人の考え方に応じていろいろ出てきてしまい，これをどのように考えるべきかは決着がついていない状態なのである．もっと言えば，極座標系という高校性でも知っている座標系ですら，原点での特異性の扱い方の違いでいろいろ出てきて，いまのところどれがよい考えかわかっていないのである．

微積分は高校数学でも扱うものである．しかも高校で教えるのは演算子的性格の強い微積分である．彼らは手作業としての微積分を習うのであるし，論理もその感覚で受け取れるものしか受け付けていない．ピアジェの発達心理学から敷衍すればこれはきわめてもっともなことである．つまり，高校性にとって，

存在とはなにがしかの手作業によって獲得されるものであって，「言語」だけに頼るものにはそれほど信頼性をおいていないのである．

数学科以外の学科でも理系の学科ならば微積分は使うのだが，使われ方は高校数学の延長で演算子的性格が強いものである．実数論から完全に論理的に組み上げる微積分の基礎部分を教えるのは数学科の中だけである．どちらも軽視できないものだが，基礎部分が固まったからといって微積分の全貌がわかるはずもないのだから，そろそろ数学科の教育も微積分の演算子的性格にピントをあわせるべきだという意見を私は持っている．

私は数学教師として長年学生に微積分とか多様体とか曲面とかを教えてきたが，ときどき学生の発する素朴な質問にハッとさせられる．試験では 0 点しかとれない劣等学生でも時代を察知する鋭敏な感性を若者は持っている．彼らの本能的直観はすでに 10 年先を見据えているとも受け取れるのである．しかし現在はこれがあまりにも無秩序に現出している．老数学教師はこの無秩序状態だけは何とかしなくてはと思うのである．

日くれて道は遠い，心細い限りだが，進まねばならぬ．鋭い感性を持っている若者を私は頼りにしたい，そういう若者に囲まれて自分の生涯を閉じることが私の理想でもある．あまり実現しそうにない夢ではあるのだが…….

最後になってしまったが，私にこの本を書くことを強く熱心に勧めてくださった，東京大学出版会編集部の丹内利香さんにこの場を借りてお礼を申し上げます．

参考文献

[1] F. Bayen, M. Flato, C. Fronsdal, A. Lichnerowicz and D. Sternheimer, Deformation theory and quantization I and II, *Ann. Phs.* **111** (1978), 61–110, 111–151.

[2] F. A. Berezin, General concept of quantization, *Comm. Math. Phys.* **8** (1975), 153–174.

[3] H. Bruck and E. Kleinfeld, The structure of alternative division rings, *Proc. A.M.S.* **2** (1951), 878–890.

[4] J. L. Brylinski, *Loop spaces, characteristic classes and geometric quantization*, Birkhäuser (1993).

[5] P. Cartier, A mad day's work: From Grothendieck to Connes and Kontsevich. The evolution of concepts of space and symmetry, *Bull. A.M.S.* **38**, No.4 (2001), 389–408.

[6] A. Connes, *Non commutative geometry*, Academic Press (1994).

[7] D. Deligne, *Déformation de l'algèbre des fonctions dúne variété symplectique*, Select Math. New series 1 (1995).

[8] B. deWitt, *Super manifolds*, Cambridge Mono. Math. Physics (1984).

[9] T. Friedrich, *Dirac operaqtors in Riemannian geometry*, AMS Graduate Studies in Math., Vol.25 (1997).

[10] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Generalized functions*, 2, Academic Press (1968).

[11] P. R. Halmos, *A Hilbet space problem book*, Van Nostrand (1967).

[12] 波多野完治(編),『ピアジェの発達心理学』国土社 (1982).

[13] N. Hitchin, *Lectures on special Lagrangian submanifolds*, arXiv: math. DG/9907034vl6Jul (1999).

[14] T. Kato, *Perterbation theory for linear operators*, Springer (1966).

[15] M. Kontsevich, *Deformation quantization of Poisson manifolds, I*, preprint. qalg/9709040.

[16] B. Kostant and S. Sternberg, Symplectic reduction, BRS cohomology and infinite-dimensional Clifford algebras, *Ann. Phys.* **176** (1987), 49–113.

[17] Y. I. Manin, *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, A.M.S Colloq. Publ. 47, A.M.S (1999).

[18] P. Michor, *Convenient setup for global analysis*, Studies 23. A.M.S (2000).

[19] N. Miyazaki, On regular Fréchet Lie group of invertible inhomogeneous Fourier integral operators on $\mathbb{R}^n$, *Tokyo J. Math.* **19** (1996), 1–38.

[20] M. Morimoto, *An introduction to Sato's hyperfunctions*, A.M.S. Trans. Mono. 129 (1993).

[21] 日本数学会(編),『岩波数学辞典 第 3 版』岩波書店 (1985).

[22] H. Omori, *Infinite dimensional Lie groups*, A.M.S. Trans. Monograph, Vol.158 (1997).

[23] H. Omori, *One must break symmetry in order to keep associativity*, Banach center publ. Vol.55 (2002), 153–163.

[24] 大森英樹,『無限次元 Lie 群論』紀伊国屋数学叢書 15 (1978).

[25] 大森英樹, 量子化された微分幾何学へ向って,『科学』岩波書店, Vol.50, No.10 (1980), 642–647.

[26] 大森英樹, なぜ多様体が必要なのか,『科学』岩波書店, Vol.52, No.12 (1982), 779–

784.
[27] 大森英樹,『力学的な微分幾何』日本評論社 (1989).
[28] 大森英樹,『多変数の微分積分』裳華房 (2002).
[29] 大森英樹,『一般力学系と場の幾何学(復刊)』裳華房 (2003).
[30] H. Omori *et al.*, On regular Fréchet Lie groups, *Tokyo J. Math.* **3**, **4**, **5** (1980, 1981, 1982).
[31] 大森英樹・前田吉昭,『量子的な微分・積分』シュプリンガー・フェアラーク 東京 (2004).
[32] H. Omori and T. Kobayashi, *Singular star-exponential functions*, SUT Jour, Mathematics 37, no.2 (2001), 137–152.
[33] H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka, Weyl manifolds and deformation quantization, *Adv. Math.* **85** (1991), 224–255.
[34] H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka, A Poincaré-Birkhof-Witt theorem for infinite dimensional Lie algebras, *J. Math. Soc. Japan* **46** (1994), 25–50.
[35] H. Omori, Y. Maeda and A. Yoshioka, Deformation quantization of Poisson algebras, *Contemp. Math.* **179** (1994), 213–246.
[36] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki and A. Yoshioka, Group of quantum volume preserving diffeomorphisms and their Berezin representation, in *Analysis on infinite-dimensional Lie groups and algebras*, World Scientific (1997), 337–354.
[37] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki and A. Yoshioka, Poincaré-Cartan class and deformation quantization of Kähler manifolds, *Commun. Math. Phys.* **194** (1998), 207–230.
[38] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki and A. Yoshioka, *Convergence of the Moyal product defined on the Fréchet-Poisson algebras of entire functions*, 233–245, in Conference Moshé Flato 1999 II. Kluwer Acad. Publ. (2001).
[39] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki and A. Yoshioka, *Singular system of exponential functions*, 169–216, in Noncommutative differential geometry Math. Phys. Studies 23., Kluwer Acad. Publ. (2000).
[40] H. Omori, Y. Maeda, N. Miyazaki and A. Yoshioka, *Strange phenomena related to ordering problems in quantizations*, Jour. Lie Theory, Vol.13, No.2 (2003), 481–510.
[41] J. Peetre, *Une caractérisation abstraite des opéraotr differentiels*, Math. Scand. 7 et 8 (1959, 1960).
[42] M. Penkava and P. Vanhaecke, *Deformation quantization of polynomial Poisson algebras*, preprint. qa/9804022, v1 (1998).
[43] R. D. Schafer, *An introduction to nonassociative algebras*, Academic Press (1966).
[44] K. Yoshida, *Functional Analysis*, Springer (1978).
[45] A. Yoshioka, *Contact Weyl manifold over a symplectic manifold*, Advanced Studies in Pure Math. Vol.37, 459–493, Math. Soc. Japan (2002).

索引

サ　行

タ 行

ラ　行

ワ　行

著者略歴

大森英樹（おおもり・ひでき）
東京大学大学院理学系研究科修了．現在，東京理科大学理工学部数学科嘱託教授．主要著書：『一般力学系と場の微分幾何学』（裳華房，1991），『力学的な微分幾何』（日本評論社，1989），『無限次元リー群論』（紀伊國屋数学叢書，1978）．

数学のなかの物理学　幾何学的量子論へむかって

2004 年 11 月 22 日　初　版

[検印廃止]

著　者　大森英樹
発行所　財団法人 東京大学出版会
代表者 五味文彦
113-8654 東京都文京区本郷 7–3–1 東大構内
電話 03–3811–8814　Fax 03–3812–6958
振替 00160–6–59964
印刷所　三美印刷株式会社
製本所　誠製本株式会社

ISBN 4–13–061304–9 Printed in Japan